纯旋量超弦

本科毕业答辩

郑卜凡

指导老师：杜一剑

2025 年 5 月 11 日

为何在能标远低于 Planck 能标情况下还要研究弦振幅?

- 历史起源说:
  弦理论第一个公式是 Veneziano 公式，提出时是作为强相互作用的经验公式，后来发现实则是四快子开弦振幅
- 场论学家说:
  弦理论在弦长极限下退化为量子场论，所以对弦振幅的研究有助于理解场论振幅，比如 KLT 关系 [KLT86] 给出规范理论振幅和引力振幅的内在联系；世界面积分的想法催生了量子场论振幅的 CHY 公式 [CHY14b; CHY14a]
- 数学家也说:
  弦理论的发展涉及到许多前沿数学的应用，近年研究指出弦理论振幅可以看作是数论函数，如 Multi Zeta Values，的生成函数，从而与数学产生联系 [Bro+14]

RNS 超弦不香吗?

由于玻色弦存在不稳定真空以及无法描述费米子等问题，通过加入超对称便可得到费米子自由度，最早发展的一类超弦是通过添加世界面旋量得到的RNS 超弦：

$$S=\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}^2z\left(\frac{2}{\alpha'}\partial X^{\mu}\bar{\partial}X_{\mu}+\psi^{\mu}\bar{\partial}\psi_{\mu}+\overline{\psi}^{\mu}\partial\overline{\psi}_{\mu}\right) \tag{1}$$

再利用一圈配分函数模不变性要求的GSO 投影便可以剔除快子态并且匹配玻色和费米自由度。但是真正需要的靶空间超对称在 RNS 超弦中被隐藏。后续又发展了靶空间超对称的GS 超弦：

$$S_{\mathrm{GS}}=\frac{1}{\pi}\int d^2z\left[\frac{1}{2}\Pi^m\overline{\Pi}_m+\frac{1}{4}\Pi_m(\theta\gamma^m\bar{\partial}\theta)-\frac{1}{4}\overline{\Pi}_m(\theta\gamma^m\partial\theta)\right] \tag{2}$$

但是其只能在光锥坐标下量子化！

RNS 超弦不香吗?

由于玻色弦存在不稳定真空以及无法描述费米子等问题，通过加入超对称便可得到费米子自由度，最早发展的一类超弦是通过添加世界面旋量得到的RNS 超弦：

Hide target spacetime SUSY

$$S = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}^2 z\left(\frac{2}{\alpha'}\partial X^\mu \overline{\partial} X_\mu + \psi^\mu \overline{\partial}\psi_\mu + \overline{\psi}^\mu \partial \overline{\psi}_\mu\right) \tag{1}$$

再利用一圈配分函数模不变性要求的GSO 投影便可以剔除快子态并且匹配玻色和费米自由度。但是真正需要的靶空间超对称在 RNS 超弦中被隐藏。后续又发展了靶空间超对称的GS 超弦：

$$S_{\mathrm{GS}} = \frac{1}{\pi}\int d^2 z\left[\frac{1}{2}\Pi^m\overline{\Pi}_m + \frac{1}{4}\Pi_m(\theta\gamma^m\overline{\partial}\theta) - \frac{1}{4}\overline{\Pi}_m(\theta\gamma^m\partial\theta)\right] \tag{2}$$

Break Lorentz covariant

但是其只能在光锥坐标下量子化！

鱼与熊掌不可兼得

这两种方案都不完美，振幅计算上 RNS 超弦拥有洛伦兹协变的顶角算符从而更加方便，但对于非平凡靶空间背景下超弦理论的构造 GS 形式有更多优势。Siegle 后续又对 GS 形式进行了改进使得其可以协变量子化：

$$S_{\text{Siegel}} = \frac{1}{\pi}\int d^2z\left[\frac{1}{2}\partial X^m\overline{\partial}X_m + p_\alpha\overline{\partial}\theta^\alpha\right] \tag{1}$$

但是这一方案与 RNS 超弦不等价，关键在于 RNS 超弦和 Siegle 超弦都有非平凡的洛伦兹 Noether 流：

$$\Sigma^{mn}_{\text{RNS}} = -\psi^m\psi^n, \quad \Sigma^{mn}_{\text{Siegel}} = -\frac{1}{2}(p\gamma^{mn}\theta)$$

鱼与熊掌不可兼得

这两种方案都不完美，振幅计算上 RNS 超弦拥有洛伦兹协变的顶角算符从而更加方便，但对于非平凡靶空间背景下超弦理论的构造 GS 形式有更多优势。Siegle 后续又对 GS 形式进行了改进使得其可以协变量子化：

$$S_{\text{Siegel}} = \frac{1}{\pi}\int d^2z\left[\frac{1}{2}\partial X^m\overline{\partial}X_m + p_\alpha\overline{\partial}\theta^\alpha\right] \tag{1}$$

但是这一方案与 RNS 超弦不等价，关键在于 RNS 超弦和 Siegle 超弦都有非平凡的洛伦兹 Noether 流，但它们的算符乘积展开不同：

$$\Sigma^{mn}_{\text{RNS}}(z)\Sigma^{pq}_{\text{RNS}}(w) \sim \frac{\delta^{p[m}\Sigma^{n]q}(w) - \delta^{q[m}\Sigma^{n]p}(w)}{z-w} + \frac{\delta^{m[q}\delta^{p]n}}{(z-w)^2}$$

$$\Sigma^{mn}_{\text{Siegel}}(z)\Sigma^{pq}_{\text{Siegel}}(w) \sim \frac{\delta^{p[m}\Sigma^{n]q}(w) - \delta^{q[m}\Sigma^{n]p}(w)}{z-w} + 4\frac{\delta^{m[q}\delta^{p]n}}{(z-w)^2}$$

Berkovits 的天才想法

Berkovits 试图通过在 Siegle 形式中加入一对玻色鬼场 $(\lambda_\alpha, w^\alpha)$，从而将 Sigle 超弦的 Lorentz 流补充为 $\Sigma^{mn} + N^{mn}$，不难发现只要有下面 OPE 成立就有希望得到 Lorentz 协变、靶空间超对称且等价于 RNS 超弦的形式:

$$N^{mn}(z)N^{pq}(w) \sim \frac{\delta^{p[m}N^{n]q}(w) - \delta^{q[m}N^{n]p}(w)}{z-w} - 3\frac{\delta^{m[q}\delta^{p]n}}{(z-w)^2} \tag{2}$$

Berkovits 通过 $U(5)$ 分解进行计算做到了这一点: [Ber00]

$$S_{\mathrm{PS}} = \frac{1}{\pi}\int d^2z \left(\frac{1}{2}\partial X^m \overline{\partial} X_m + p_\alpha \overline{\partial}\theta^\alpha - w_\alpha \overline{\partial}\lambda^\alpha\right) \tag{3}$$

BRST 算符幂零，$Q^2_{\mathrm{BRST}} = 0$，要求靶空间旋量满足约束 $\lambda\gamma^\mu\lambda = 0$，数学上称 λ_α 为纯旋量。所以 Berkovits 发现的这以理论形式也被称为纯旋量超弦。

Berkovits 的天才想法

Berkovits 试图通过在 Siegle 形式中加入一对玻色鬼场 $(\lambda_\alpha, w^\alpha)$，从而将 Sigle 超弦的 Lorentz 流补充为 $\Sigma^{mn} + N^{mn}$，不难发现只要有下面 OPE 成立就有希望得到 Lorentz 协变、靶空间超对称且等价于 RNS 超弦的形式：

$$N^{mn}(z)N^{pq}(w) \sim \frac{\delta^{p[m}N^{n]q}(w) - \delta^{q[m}N^{n]p}(w)}{z-w} - 3\frac{\delta^{m[q}\delta^{p]n}}{(z-w)^2} \tag{2}$$

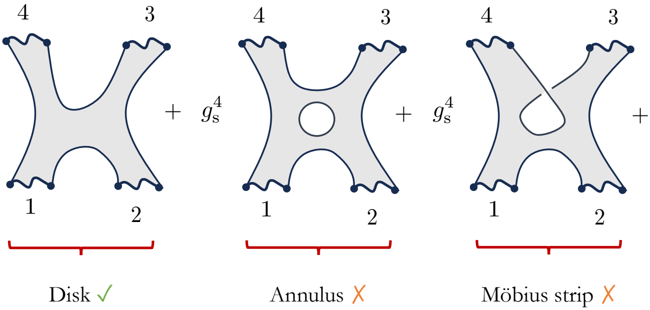
Berkovits 通过 $U(5)$ 分解进行计算做到了这一点：[Ber00]

$$S_{\mathrm{PS}} = \frac{1}{\pi}\int d^2z \left(\frac{1}{2}\partial X^m \overline{\partial} X_m + p_\alpha \overline{\partial}\theta^\alpha - w_\alpha \overline{\partial}\lambda^\alpha\right) \tag{3}$$

由于纯旋量约束所以 (3) 不是自由 CFT，但是 Berkovits 将其 $U(5)$ 分解到自由变量后发现刚好会给出正确的 OPE 补偿 (2)。而且中心荷 $c_{\mathrm{Siegle}} = -22 \neq 0$，$\lambda w$ 鬼场刚好补偿了这一中心荷。

不同于场振幅按照顶点个数展开，弦论振幅微扰展开是由世界面欧拉数决定的：

$$\mathcal{A}^{\text{planar}}(s,t) = g_s^2 \,[\text{Disk}] + g_s^4 \,[\text{Annulus}] + g_s^4 \,[\text{Möbius strip}] + \dots$$



后面关注开弦振幅最低阶，盘面振幅的贡献。纯旋量超弦一般的盘面振幅由下面的公式给出：

$$\mathcal{A}(P) = \int_{D(P)} dz \langle\langle V_1(z_1) U_2(z_2) \dots U_{n-2}(z_{n-2}) V_{n-1}(z_{n-1}) V_n(z_n) \rangle\rangle \qquad (4)$$

BRST 量子化得到的无质量态积分顶角算符 U 和无积分顶角算符 V 为:

$$U(z) = \partial\theta^\alpha A_\alpha(X,\theta) + A_m(X,\theta)\Pi^m + d_\alpha W^\alpha(X,\theta) + \frac{1}{2}N_{mn}F^{mn}(X,\theta)$$

$$V(z) = \lambda^\alpha A_\alpha(X,\theta), \quad \{A_{\alpha/m}, W^\alpha, F^{mn}\}\,(\text{a.k.a. } K) \in 10\text{D SYM}$$

(4) 中关联函数计算第一步是利用物质场 OPE 展开顶角算符 OPE:

$$X^\mu(z,\bar{z})X^\nu(w,\bar{w}) \sim -\eta^{\mu\nu}\ln|z-w|^2, \quad d_\alpha(z)\theta^\beta(w) \sim \frac{\delta_\alpha^\beta}{z-w},$$

$$d_\alpha(z)d_\beta(w) \sim -\frac{\gamma^\mu_{\alpha\beta}\Pi_\mu(w)}{z-w}, \quad d_\alpha(z)\Pi^\mu(w) \sim \frac{(\gamma^\mu\partial\theta(w))_\alpha}{z-w},$$

$$\Pi^\mu(z)\Pi^\nu(w) \sim -\frac{\eta^{\mu\nu}}{(z-w)^2}, \quad d_\alpha(z)K \sim \frac{D_\alpha K}{z-w}, \quad \Pi^m(z)K \sim -\frac{\partial^m K}{z-w}$$

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + \frac{1}{2}(\gamma^\mu\theta)_\alpha\partial_\mu, \quad \Pi^m = \partial X^m + \frac{1}{2}(\theta\gamma^m\partial\theta)$$

$$d_\alpha = p_\alpha - \frac{1}{2}\left(\partial X^m + \frac{1}{4}(\theta\gamma^m\partial\theta)\right)(\gamma_m\theta)_\alpha$$

BRST 量子化得到的无质量态积分顶角算符 U 和无积分顶角算符 V 为:

$$U(z) = \partial\theta^\alpha A_\alpha(X,\theta) + A_m(X,\theta)\Pi^m + d_\alpha W^\alpha(X,\theta) + \frac{1}{2}N_{mn}F^{mn}(X,\theta)$$
$$V(z) = \lambda^\alpha A_\alpha(X,\theta), \quad \{A_{\alpha/m}, W^\alpha, F^{mn}\}\,(\text{a.k.a. } K) \in \text{10D SYM}$$

第二步是把超场按照 θ 展开，这个时候 K 关于 X 的平面波依赖已经被物质场 OPE 吸收了，只剩下鬼场零模需要计算，它们与世界面坐标无关，鬼场积分测度为：

$$\langle(\lambda\gamma^m\theta)(\lambda\gamma^n\theta)(\lambda\gamma^p\theta)(\theta\gamma_{mnp}\theta)\rangle = 2880 \tag{5}$$

而 SYM 超场的展开式十分复杂，比如：

$$A_i^m(X,\theta) = \left\{(\cosh\sqrt{O})^m{}_q e_i^q + \left(\frac{\sinh\sqrt{O}}{\sqrt{O}}\right)^m{}_q(\theta\gamma^q\chi_i)\right\}\mathrm{e}^{k\cdot X} \tag{6}$$

其中选取了 $ik^\mu \to k^\mu$ 的符号约定，$O^m{}_q := \frac{1}{2}(\theta\gamma^m{}_{qn}\theta)k_i^n$.

纯旋量超弦虽然在描述圈级振幅上相较于 RNS 超弦更有利，但是树级振幅计算乍看起来优势并不明显。但是倘若我们将顶角算符看作一个整体，他们的 OPE 之间有非常神奇的规律，且具有自由李代数结构：

$$V_A(z_a)U_B(z_b) \sim \frac{V_{[A,B]}(z_b)}{z_{ab}}, \quad U_A(z_a)U_B(z_b) \sim \frac{U_{[A,B]}(z_b)}{z_{ab}} \tag{7}$$

这里指标 A 可以是一个李多项式，而不必是单粒子指标，其定义只需要做指标替换 $K_i \to K_A$，而多粒子超场K_A 和单粒子超场 K_i 之间又存在确定的递推关系，比如 Lorenz 规范下：

$$\hat{A}_\alpha^{[P,Q]} = \frac{1}{2}\left[\hat{A}_\alpha^Q(k_Q\cdot\hat{A}_P) + \hat{A}Q^m(\gamma_m\hat{W}_P)\alpha - (P\leftrightarrow Q)\right]$$

$$\hat{A}^m_{[P,Q]} = \frac{1}{2}\left[\hat{A}^m_Q(k_Q\cdot\hat{A}_P) + \hat{A}^P_n\hat{F}^{nm}_Q + (\hat{W}_P\gamma^m\hat{W}_Q) - (P\leftrightarrow Q)\right]$$

$$\hat{W}^\alpha_{[P,Q]} = \frac{1}{4}\hat{F}^{rs}_P(\gamma_{rs}\hat{W}_Q)^\alpha + \frac{1}{2}(k_Q\cdot\hat{A}_P)\hat{W}^\alpha_Q + \frac{1}{2}\hat{W}^{m\alpha}_Q\hat{A}^P_m - (P\leftrightarrow Q)$$

$$\hat{F}^{mn}_{[P,Q]} = \frac{1}{2}\left[\hat{F}^{mn}_Q(k_Q\cdot\hat{A}_P) + \hat{F}^{p|mn}_Q\hat{A}^p_p + \hat{F}^{[m}_Q\hat{F}^{n]r}_P - 2\gamma^{[m}_{\alpha\beta}\hat{W}^{n]\alpha}_P\hat{W}^\beta_Q - (P\leftrightarrow Q)\right]$$

纯旋量超弦虽然在描述圈级振幅上相较于 RNS 超弦更有利，但是树级振幅计算乍看起来优势并不明显。但是倘若我们将顶角算符看作一个整体，他们的 OPE 之间有非常神奇的规律，且具有自由李代数结构：

$$V_A(z_a)U_B(z_b) \sim \frac{V_{[A,B]}(z_b)}{z_{ab}}, \quad U_A(z_a)U_B(z_b) \sim \frac{U_{[A,B]}(z_b)}{z_{ab}} \tag{7}$$

这里指标 A 可以是一个李多项式，而不必是单粒子指标，其定义只需要做指标替换 $K_i \to K_A$，而多粒子超场K_A 和单粒子超场 K_i 之间又存在确定的递推关系

所以其实可以递推地得到任意点无质量态盘面振幅：[MSS13a; MSS13b]

$$\boxed{\mathcal{A}_n(P) = (2\alpha')^{n-3}\int d\mu_P^n \sum_{AB=23\ldots n-2} \langle (V_{1A}\mathcal{Z}_{1A})(V_{(n-1)\tilde{B}}\mathcal{Z}_{n-1,\tilde{B}})V_n\rangle + \mathrm{perm}} \tag{8}$$

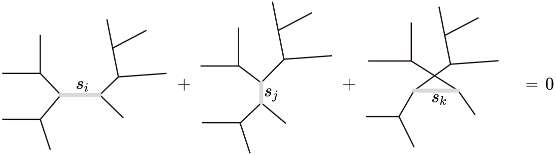
$$\mathcal{Z}_{123\cdots p} := \frac{1}{z_{12}z_{23}\cdots z_{p-1,p}}, \quad \int d\mu_P^n := \int_{D(P)} dz_2 dz_3 \cdots dz_{n-2} \prod_{1\le i<j}^{n-1} |z_{ij}|^{-2\alpha' s_{ij}}$$

色-运动学对偶

考虑将规范理论用三顶角图（不必是费曼图）编码：

$$\mathcal{A}_n = \sum_{i\in\Gamma_n} \frac{c_i N_i}{D_i} \tag{9}$$

这里极点 D_i 完全由内线给出，并不是重点. 分子部分 [BCJ08] 猜想存在一种编码方式，使得 $\{N_i\}$ 满足和色因子 $\{c_i\}$ 由图的顶点结构给出的相同的 Lie 代数结构：



$$c_i \quad + \quad c_j \quad + \quad c_k \quad = 0$$

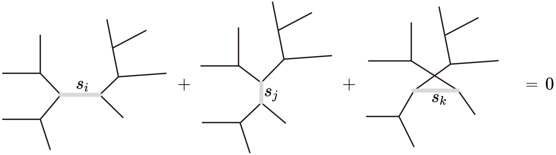
而一旦得到这样的 $\{N_i\}$，只用将 $\{c_i\}$ 也替换为 $\{N_i\}$ 便可得到微扰引力振幅！这样的分子称为BCJ 分子。

色-运动学对偶

考虑将规范理论用三顶角图（不必是费曼图）编码：

$$\mathcal{A}_n = \sum_{i\in\Gamma_n} \frac{c_i N_i}{D_i} \xrightarrow[\text{Loop } \exists\{N_i\}?]{\text{Tree } \exists\{N_i\}\checkmark} \mathcal{M}_n = \sum_{i\in\Gamma_n} \frac{N_i N_i}{D_i} = \sum_{i\in\Gamma_n} \frac{N_i \tilde{N}_i}{D_i} \tag{9}$$

这里极点 D_i 完全由内线给出，并不是重点. 分子部分 [BCJ08] 猜想存在一种编码方式，使得 $\{N_i\}$ 满足和色因子 $\{c_i\}$ 由图的顶点结构给出的相同的 Lie 代数结构：



$$c_i + c_j + c_k = 0$$

而一旦得到这样的 $\{N_i\}$，只用将 $\{c_i\}$ 也替换为 $\{N_i\}$ 便可得到微扰引力振幅！这样的分子称为BCJ 分子。

在 DDM 基底下可以将 (9) 写成下面的形式：[DDM00]

$$\mathcal{A}_n^{\text{gauge}} = \sum_{P,Q\in S_{n-2}} c_{1|P|n} m(1,P,n|1,Q,n) N_{1|Q|n} \quad m(\bullet|\bullet) \text{ for } \operatorname{tr}\phi^3 \text{ Amp.}$$

这些 $\{N_i\}$ 之间相互独立，所以只要我们将 SYM 振幅写成上面的形式，就能立即读出 BCJ 分子，而纯旋量超弦很容易做到这一点 [MSS11]。首先利用 Z 积分可以将超弦振幅 (8) 改写为：

$$\boxed{\mathcal{A}_n(P) = \sum_{AB=23\cdots n-2} \langle V_{1A} V_{(n-1)\tilde{B}} V_n \rangle (-1)^{|B|-1} Z(P|1,A,n,B,n-1) + \text{perm}} \tag{10}$$

$$Z(P|Q) := (2\alpha')^{n-3} \int_{D(P)} \frac{dz_1 dz_2 \cdots dz_n}{\text{vol}(\text{SL}_2(\mathbb{R}))} \prod_{i<j}^{n} |z_{ij}|^{-2\alpha' s_{ij}} \text{PT}(Q) \tag{11}$$

在弦长极限下 $\lim_{\alpha'\to 0} Z(P|Q) = m(P|Q)$，$\mathcal{A}_n(P)^{\text{string}} \to \mathcal{A}_n(P)^{\text{gauge}}$

仍在 DDM 基底下展开，但写成偏振幅形式且对外腿进行适当重排：

$$\mathcal{A}_n(P)^{\text{gauge}} = \sum_{Q\in S_{n-2}} N_{1|Q|n-1}\, m(P|1,Q,n-1), \quad \sum_{Q} \sim \sum_{AnB} +\text{perm}$$

这些 $\{N_i\}$ 之间相互独立，所以只要我们将 SYM 振幅写成上面的形式，就能立即读出 BCJ 分子，而纯旋量超弦很容易做到这一点 [MSS11]。首先利用 Z 积分可以将超弦振幅 (8) 改写为：

$$\mathcal{A}_n(P)^{\text{string}} \xrightarrow{\alpha'\to 0} \sum_{AB=23\cdots n-2} \langle V_{1A} V_{(n-1)\tilde{B}} V_n\rangle (-1)^{|B|-1} m(P|1,A,n,B,n-1) + \text{perm}$$

$$Z(P|Q) := (2\alpha')^{n-3} \int_{D(P)} \frac{dz_1 dz_2 \cdots dz_n}{\text{vol}(\text{SL}_2(\mathbb{R}))} \prod_{i<j}^{n} |z_{ij}|^{-2\alpha' s_{ij}} \text{PT}(Q) \qquad (10)$$

在弦长极限下 $\lim_{\alpha'\to 0} Z(P|Q) = m(P|Q)$，$\mathcal{A}_n(P)^{\text{string}} \to \mathcal{A}_n(P)^{\text{gauge}}$

仍在 DDM 基底下展开，但写成偏振幅形式且对外腿进行适当重排：

$$\mathcal{A}_n(P)^{\text{gauge}} = \sum_{Q\in S_{n-2}} N_{1|Q|n-1}\, m(P|1,Q,n-1), \quad \sum_{Q} \sim \sum_{AnB} +\text{perm}$$

这些 $\{N_i\}$ 之间相互独立，所以只要我们将 SYM 振幅写成上面的形式，就能立即读出 BCJ 分子，而纯旋量超弦很容易做到这一点 [MSS11]。首先利用 Z 积分可以将超弦振幅 (8) 改写为：

$$\mathcal{A}_n(P)^{\text{string}} \xrightarrow{\alpha'\to 0} \sum_{AB=23\cdots n-2} \langle V_{1A} V_{(n-1)\tilde{B}} V_n\rangle (-1)^{|B|-1} m(P|1,A,n,B,n-1) + \text{perm}$$

$$Z(P|Q) := (2\alpha')^{n-3} \int_{D(P)} \frac{dz_1 dz_2 \cdots dz_n}{\text{vol}(\text{SL}_2(\mathbb{R}))} \prod_{i<j}^{n} |z_{ij}|^{-2\alpha' s_{ij}} \text{PT}(Q) \tag{10}$$

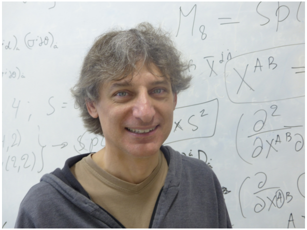
在弦长极限下 $\lim_{\alpha'\to 0} Z(P|Q) = m(P|Q)$，$\mathcal{A}_n(P)^{\text{string}} \to \mathcal{A}_n(P)^{\text{gauge}}$

$$\Rightarrow \boxed{N_{1|AnB|n-1} = (-1)^{|B|-1} \langle V_{1A} V_{(n-1)\tilde{B}} V_n\rangle}$$

这样便显式地构造出了 BCJ 分子！ □

Thanks!

Yu-tin Huang



Nathan Berkovits

Your Praise, My Phoenix Flame

[BCJ08] Z. Bern, J. J. M. Carrasco, and Henrik Johansson. "New Relations for Gauge-Theory Amplitudes". In: (2008).

[Ber00] Nathan Berkovits. "Super Poincare covariant quantization of the superstring". In: (2000).

[Bro+14] Johannes Broedel et al. "All order α'-expansion of superstring trees from the Drinfeld associator". In: (2014).

[CHY14a] Freddy Cachazo, Song He, and Ellis Ye Yuan. "Scattering of Massless Particles in Arbitrary Dimensions". In: (2014).

[CHY14b] Freddy Cachazo, Song He, and Ellis Ye Yuan. "Scattering of Massless Particles: Scalars, Gluons and Gravitons". In: (2014).

[DDM00] Vittorio Del Duca, Lance J. Dixon, and Fabio Maltoni. "New color decompositions for gauge amplitudes at tree and loop level". In: (2000).

[KLT86] H. Kawai, D. C. Lewellen, and S. H. H. Tye. "A Relation Between Tree Amplitudes of Closed and Open Strings". In: (1986).

[MSS11] Carlos R. Mafra, Oliver Schlotterer, and Stephan Stieberger. "Explicit BCJ Numerators from Pure Spinors". In: (2011).

[MSS13a] Carlos R. Mafra, Oliver Schlotterer, and Stephan Stieberger. "Complete N-Point Superstring Disk Amplitude I. Pure Spinor Computation". In: (2013).

[MSS13b] Carlos R. Mafra, Oliver Schlotterer, and Stephan Stieberger. "Complete N-Point Superstring Disk Amplitude II. Amplitude and Hypergeometric Function Structure". In: (2013).