拓扑空间

幂集 2^X：由X的所有子集构成的集合

例：$X=\{1,2\}$，$2^X=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

2^X是集合的集合，即集簇.

$2^{(2^X)}$：由2^X的所有子集构成的集合.

例：$\{\{\phi\},\{\{1\}\},\{\{2\}\},\{\{1,2\}\},\{\phi,\{1\}\},\{\phi,\{2\}\}\cdots\cdots\}$

$2^{(2^X)}$是集合的集合的集合.

基准开邻域结构：

$X\neq\phi$，若映射 $\mathcal{N}: X\to 2^{(2^X)}$ 满足下面三条公理：

① $\forall x\in X$, $\mathcal{N}(x)\neq\phi$ 且 $\forall U\in\mathcal{N}(x)$, $x\in U$

x一定有基准开邻域，且是其任意基准开邻域中元素

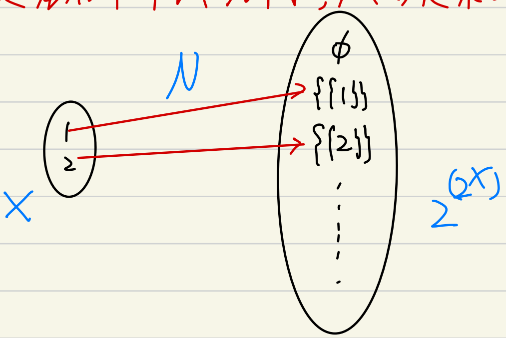
② $U,V\in\mathcal{N}(x)\to\exists W\in\mathcal{N}(x)$, s.t. $W\subseteq U\cap V$

x任意两基准开邻域之交是x的邻域

③ $y\in U\in\mathcal{N}(x)\longrightarrow\exists V\in\mathcal{N}(y)$ s.t. $V\subseteq U$

任意基准开邻域是其所含每个元素的邻域

$\mathcal{N}$是基准开邻域结构，$\mathcal{N}(x)$是集合的集合



$\mathcal{N}(x)$中的某个元素为X中元素构成的集合，这才是基准开邻域，而其超集，可由$\mathcal{N}(x)$的元素的并构成称为邻域.

例：R上的基准开邻域结构

- Euclidean Line：$\mathcal{N}(x)=\{B_\varepsilon(x)\mid\varepsilon>0\}$

$B_\varepsilon(x)\equiv\{y\mid |y-x|<\varepsilon\}$

- Sorgenfrey Line：$\mathcal{N}(x)=\{[x,x+\varepsilon)\subseteq\mathbb{R}\mid\varepsilon>0\}$

我们在用两种不同方式去定义x的邻域，从而进一步定义不同的R上的连续性. 实分析中

讲的连续性是由Euclidean Line去定义的.

拓扑空间

$\mathcal{N}$是X上的基准开邻域结构,如果X的某子集U是其中每个元素的邻域.(显然基准开邻域满足这一点). 则称U是一个开集. 所有开集构成一个子集族 τ 为一个由$\mathcal{N}$生成的拓扑结构. (X,τ),即定义了什么是开集的集合称为拓扑空间.

不难证明, U是开集 iff. U由若干个基准开邻域并起来形成.

另一种等价定义:

(X,τ)是拓扑空间,若X的子集族 τ (什么是开集) 满足下面三条公理:

① $X\in\tau$, $\phi\in\tau$

② τ中任意多个元素之并仍属于τ $(1,2)\cup(2,3)\cup\cdots$ 还是开集

③ τ中有限多个元素之交仍属于τ. $\bigcap_{n\to\infty}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})=0$ 不是开集

很多教材一上来就如此定义,淡化了$\mathcal{N}$,而$\mathcal{N}$的来源是有很强的数学动机的. 不过这种定义方式便于后面进行各种推演.

拓扑二例:

①平凡拓扑: 只取 X,ϕ 为开集

②离散拓扑: 取X中每个元素为开集

度量空间

定义完什么是开集、下面定义什么是距离.

X上一个度量是一个映射: $d: X\times X\longrightarrow\mathbb{R}$.

①正定性 : $d(x,y)\geq 0$. iff $x=y$ 时取等号.

②对称性: $d(x,y)=d(y,x)$

③三角不等式: $d(x,y)+d(y,z)\leq d(x,z)$

(X,d)合称为度量空间.

由度量诱导的拓扑:

$B_\varepsilon(x)=\{y\in X\mid d(x,y)<\varepsilon\}$, 取 $\mathcal{N}_d(x)=\{B_\varepsilon(x)\mid\varepsilon>0\}$ $B_\varepsilon(x)$是基准开邻域, $B_\varepsilon(x)$及它们之并便为X上开集. 当$\mathcal{N}_d(x)$的确是个well-define的基准开邻域,则称其诱导的拓扑 τ_d 为度量拓扑,并非所有拓扑均可由某 $d(x,y)$ 诱导.

基本术语:

① 邻域: A为x邻域 → $\exists\ U\in N(x)\subseteq A$ ($x\in U$, U 自然为开集)

$\exists$开集U, $x\in U\subseteq A$. 而U由$N(x)$并起来构成. 故$\exists\ V\in N(x)$, $V\subseteq U\subseteq A$. 而$V\ni x$

包含x的某个开集U的超集A称为x的一个邻域 (与前文之定义等价)

② 内点: A是x邻域 → x为A内点. → 全体x构成A内部 A°

$A^\circ=A$ iff A为开集, 邻域不一定是开集, 但是如果A是其中每个点邻域, 那便是开集. 反之亦然

上面这一点用$N(x)$的语言很好说明, 下面用Topology space语言证明:

Proof: $\forall x\in A$, $\exists$开集$U(x)$, $x\in U(x)\subseteq A$, define $V=\bigcup_{x\in A}U(x)$.

$\forall x\in V\rightarrow x\in U(x)\subseteq A\rightarrow V\subseteq A$, $\forall x\in A\ \exists\ U(x)\subseteq A$ 即 $x\in V$

$\rightarrow A\subseteq V\rightarrow A=V$. 由公理知A为开集.

A为开集. 取 $U=A\ni x$. 即知A为其中每元素邻域 $\square$

③ 闭集: A^c为开集 → A为闭集 (于是X,ϕ 即是开集也是闭集)

④ 聚点: x的每个邻域中均含有$A\setminus\{x\}$中的点. 则称x为A聚点 (极限点)

⑤ 导集: A中所有聚点构成的集合A'

⑥ 闭包: $\bar{A}=A\cup A'$, $x\in\bar{A}$ iff $\forall x$的某邻域, $U\cap A\neq\phi$ $(A^c)^\circ=(\bar{A})^c$

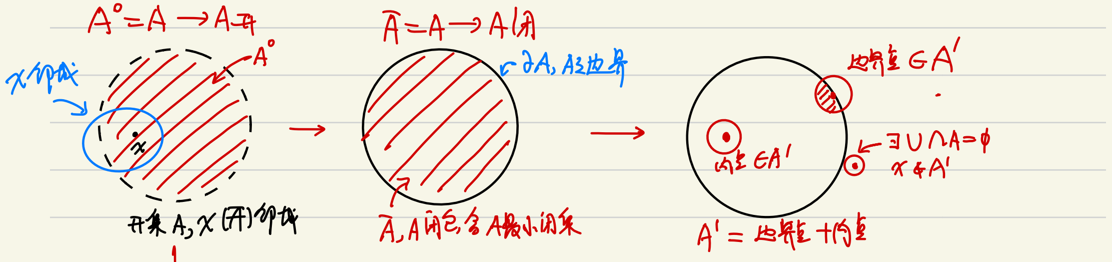
⑦ 稠密: $\bar{A}=X$, 称A在X上稠密 (dense)

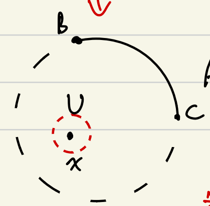
⑧ 可分: X有只含可数多个元素的稠密子集

例: $\bar{\mathbb{Q}}=E^1$ 即 $\mathbb{R}^1$ $\mathbb{Q}$在$\mathbb{R}^1$上稠密, $\mathbb{R}^1\supseteq\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$只含可数个元素 (无限但可数)

故 $\mathbb{R}^1$ 可分 (separable)

⑨ 边界: $\partial A\equiv\bar{A}\cap A^\circ$



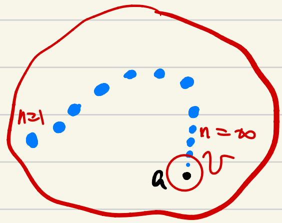


$A\supseteq U$, A不是开集但是是x邻域 去掉$\overset{\frown}{BC}$后的点构成的集合为A°, 其中所有点都以A°为邻域, 是开集, 是包含于A的最大开集

※ 只是$\mathbb{R}^n$中的形象例子, 不能代替抽象定义

① 序列的极限:

对于 $\{x_n\}$, 若 $\forall a$ 的一个基本开邻域 U, $\exists N\in\mathbb{N}$, s.t. $n>N$ 时 $x_n\in U$, 则称 x_n 收敛于 a, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \to a$.



由 $\mathbb{R}^n$ 中拓扑概念的类比可很快说明(不是严谨证明)下面结论正确性

$$A^\circ = A \text{ iff } A \text{ 开} \qquad\qquad \bar{A} = A \text{ iff } A \text{ 闭}$$

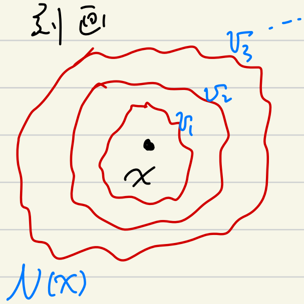
$$A\subseteq B \to A^\circ \subseteq B^\circ \qquad \xrightarrow{(A^c)^\circ = \overline{A}^c} \qquad A\subseteq B \to \bar{A}\subseteq \bar{B}$$

$$(A_1\cap\cdots\cap A_n)^\circ = A_1^\circ\cap\cdots\cap A_n^\circ \qquad \xleftarrow[(A^\circ)^c = \overline{A^c}]{} \qquad \overline{(A_1\cup\cdots\cup A_n)} = \bar{A}_1\cup\cdots\cup\bar{A}_n$$

$$\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big)^\circ \supseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^\circ \qquad\qquad \overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \bar{A}_\lambda$$

连续映射

前面引入的基本开邻域 其实是在刻画"什么样才算充分接近一个元素", 把元素 $x\in X \longrightarrow \mathcal{N}(x)$ 中一个 U 即 x 一个邻域, 就等于对 x 的一个逼近的刻画



$\mathcal{N} \xrightarrow{\text{决定}}$ 拓扑结构了

下面考虑从拓扑结构直接定义连续性.

连续映射:

X, Y 是两个拓扑空间, 若映射 $f: X\to Y$ 满足 $\forall f(x_0)$ 的邻域 V, $f^{-1}(V)$ 都是 x_0 的邻域, 则称 f 在 x_0 处连续. 在定义域上处处都连续映射称为**连续映射**

"都" 因为 f 可能是多对一

邻域的原像是邻域

不过其实上面的定义和下面所常用的定义是等价的.

f在x_0处连续 iff $f(x_0)$的任一基本开邻域 U 的原像 $f^{-1}(U)$ 包含一个 x_0 的基本开邻域

Proof: 必要性，f在x_0处连续 → $\forall f(x_0)$邻域 V, $f^{-1}(V)$ 也是 x_0 邻域，故 V 为基本开邻域，再利用基本开邻域与邻域之间的关系(包含关系)即证.

充分性：$\forall U, f(x_0)\in U\in N_Y[f(x_0)]$, $\exists V$, $x_0\in V\in N_X(x_0)$ s.t. $f^{-1}(U)\supseteq V$. 现在 $\forall f(x_0)$ 的一个邻域 W，由定义，∃一个基本开邻域 U, $U\subseteq W$ 而这意味着∃x_0基本开邻域 V, $f^{-1}(U)\supseteq V$, 而 $f^{-1}(U)\subseteq f^{-1}(W)$ 故 $f^{-1}(W)\supseteq V$, 也就是说 $f^{-1}(W)$ 也是 x_0 邻域，即证. □

回到 $\mathbb{R}^n$ 度量空间中看一下这样定义的合理性.

度量空间中基本开邻域为开球 $B_\varepsilon(x_0)=\{x \mid d_X(x,x_0)<\varepsilon\}$, f连续即说 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, $f^{-1}[B^Y_\varepsilon(f(x_0))]\supseteq B^X_\delta(x_0)$, 即 $\forall x\in B_\delta(x_0)\to x\in f^{-1}[B^Y_\varepsilon(f(x_0))]\to f(x)\in B^Y_\varepsilon(f(x_0))$

即 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ s.t. $d_X(x,x_0)<\delta\to d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$ 为真. 这不就是在说x充分接近x_0时 $f(x)$ 充分接近 $f(x_0)$ 吗?! 这也是度量空间中证连续性方法. ☆

定理: $f: X\to Y$ 在x_0处连续, $g: Y\to Z$ 在$f(x_0)$处连续, 则 $g\circ f: X\to Z$ 在x_0处也连续.

要证一点处连续，关键是抓住"邻域的原像是邻域"，邻域是开集的超集也是$N(x)$的元素，实际上我们后面很少再使用基本开邻域，因为拓扑结构是最重要的，而一个拓扑结构可以不用基本开邻域结构去定义.

☆ 前面定义连续性是在新定义之前，用邻域去定义，而考虑一个映射是否处处连续可用下面的充要条件，很多书也直接用作连续映射的定义.

开集的原像是开集

这句话同样等价于说：闭集的原像是闭集. (用 $f^{-1}(U)^c=f^{-1}(U^c)$ 证)

Proof: $\forall x\in X$, f在x处连续即 $\forall f(x)$邻域 U, $f^{-1}(U)$ 是x邻域，而 $\forall f(x)$的一个开邻域 V, $f^{-1}(V)$ 是x邻域，开邻域V是其每一点的邻域，故 $f^{-1}(V)$ 也是其每一点邻域，故 $f^{-1}(V)$ 在X中开，x是任取的，故这一结论对Y中所有开集V均成立. 必要性得证.

∀Y中开集U, 则 $f^{-1}(U)$是X上开集. (开集是其每点之邻域), $\forall f(x)\in U\subseteq Y$

$f^{-1}(V)$是x_0的邻域，即 f在x_0处连续。V，$f(x_0)$ 都任取，故 x_0 也任取，故 f 处处连续。 $\square$

现在回过头来看为什么定义连续性要用"原像"来刻画？而不直接用"像"。考虑 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的函数 $f(x)=1$，$x\in(-1,1)$，$(-1,1)\to\{1\}$，开→闭，而 $f(x)$ 恒等映射显然在我们的拓扑定义下仍应当保持连续性不变。

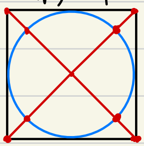
同胚：若 $f:X\to Y$ 是一双射，且 f与f^{-1}都连续，则称f为同胚映射，X与Y同胚（拓扑等价），$X\cong Y$。

开集的原像是开集，开集的像仍是开集

易证同胚是一个等价关系，满足反身、对称、传递性。

常用同胚：

① 中心投影，单位圆周 $S^1\longleftrightarrow$ 正方形X.（取$\mathbb{R}^2$上的欧氏度量拓扑）



$$f: X\to S^1,\quad (x,y)\mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

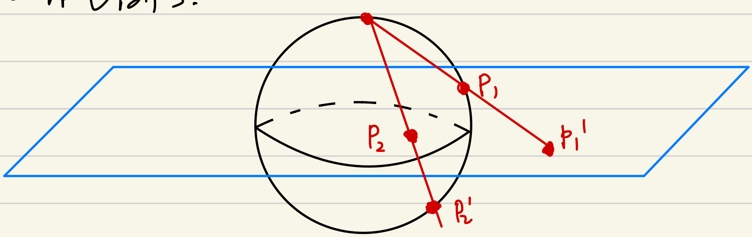
② 直线 → 线段 $\mathbb{R}^1\cong(-1,1)$，$f:\mathbb{R}^1\to(-1,1)$，$x\mapsto \frac{x}{1+|x|}$

同理，$\mathbb{R}^n\cong B_1^n$，$f:\mathbb{R}^n\longleftrightarrow B_1^n$，$\vec{x}\mapsto\frac{\vec{x}}{1+\|\vec{x}\|}$

① 球极投影

S^n 表示n维单位球面，$P=(0,0,\dots,1)$，则 $S^n\setminus\{P\}\cong\mathbb{R}^n$（挖去极点后）

用 $n=2$ 作为例子。



乘积空间

X 表示集合的笛卡尔直积，单纯并在一起罢了，则对于已知的两个拓扑空间 (X,τ_X) (Y,τ_Y)，我们可以定义 $X\times Y$ 的一个拓扑 $(X\times Y,\tau)$ 称为乘积拓扑，这样定义的拓扑空间即为乘积空间。

$$\tau=\{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda\times V_\lambda)\mid \forall U_\lambda\in\tau_X,\ V_\lambda\in\tau_Y\}$$

也就是说，$X\times Y$ 中的开集是一系列"长方形" $U_\lambda\times V_\lambda$ 的并（并不一定是 $U\times V$，$U\in\tau_X,\ V\in\tau_Y$ 形式）其中 $U_\lambda\in\tau_X,\ V_\lambda\in\tau_Y$

其确实是个拓扑：① $X\times Y$ 取 $U_\lambda=X,\ V_\lambda=Y$；$\phi$ 取 $U_\lambda=\phi=V_\lambda$

②③ $U_1\in\tau_X,\ V_1\in\tau_Y\longrightarrow U_1\times V_1\in\tau$

$U_2\in\tau_X,\ V_2\in\tau_Y\to U_1\times V_2\in\tau$

$(U_1\times V_1)\cap(U_1\times V_2)=(U_1\cap U_2)\times(V_1\cap V_2)\in\tau$ $\square$

用拓扑生成拓扑

弱拓扑：现在假设我们有一堆已知的拓扑空间 (Y_λ,τ_λ) 由 $\lambda\in\Lambda$ 标记，且一堆映射 $f_\lambda: X\to Y_\lambda$。则 X 上满足条件：每个 $f_\lambda:(X,\tau)\to(Y_\lambda,\tau_\lambda)$ 都连续的最小拓扑（拓扑本身是在定义啥是开集，最小指包含在定义下，只需定义最小的开集）称为由这些 f_λ 决定的弱拓扑

拓扑总是可由基准开邻域导出，故现在问题是应当如何取这些 $N(x)$ 使生成的拓扑 τ 最小。

Step1：取 $M(x)=\{f_\lambda^{-1}(U_\lambda)\mid\lambda\in\Lambda,\ f_\lambda(x)\in U_\lambda\in\tau_\lambda\}$

Step2：取 $N(x)=\{M(x)\text{中有限个元素的交集}\}\cup M(x)$

则 N 是弱拓扑的基准开邻域结构。Step1. 是直接把开集的原像当作基准开邻域。X 中开集仅由 $M(x)$ 这些小元素并成，但 $M(x)$ 之交也当是 x 邻域，即属于 x 基准邻域的超集。Step2. 正是为了由一公理直接找到的交也取为 $N(x)$ 中元素

Proof：先证这样定义满足三条公理：

① $\forall x\in X$，$f_\lambda(x)\in Y_\lambda$，而 $f(x)\in U_\lambda\to U_\lambda\neq\phi\to f^{-1}(U_\lambda)\neq\phi\to M(x)\neq\phi$ $\to N(x)\neq\phi$。$\forall U\in N(x)$ 而 $\forall V\in M(x)$，$x\in V\longrightarrow x\in U$.

② $\forall U,V\in N(x)$，U,V 均为 $M(x)$ 中元素或 $M(x)$ 中有限个元素交集，则 $U\cap V$ 仍为 $M(x)$ 中有限个元素交集 $\longrightarrow U\cap V\in N(x)$

③ $\forall U\in N(x)$，$\forall y\in U$，下证 $\exists V\in N(y)$ s.t. $y\in V\subseteq U$

其实取 $V=U$ 即可。因为 $y\in U\to\forall f_\lambda^{-1}(U_\lambda)\in M(x)$，$y\in f_\lambda^{-1}(U_\lambda)\longrightarrow f_\lambda(y)\in U_\lambda$ $\longrightarrow M(x)=M(y)\longrightarrow N(x)=N(y)$ 故 $U\in N(x)=N(y)$

下面证明其的确最小. 设 τ' 满足条件, 则 $\forall U_\lambda \in \tau_\lambda \longrightarrow f^{-1}(U_\lambda) \in \tau'$ (开集的原像开)
故 $\forall x\in X, \forall U \in N(x) \longrightarrow U \in \tau'$, 而 N 生成的拓扑 τ 由 U 的并集构成 故 $\tau \subseteq \tau'$. □

乘积拓扑是一个弱拓扑:

(X,τ_X), (Y,τ_Y) 是两个拓扑空间, 在 $X\times Y$ 上定义 投射 (投影更一般):

$$j_X: X\times Y \to X,\quad (x,y)\mapsto x$$
$$j_Y: X\times Y \to Y,\quad (x,y)\mapsto y$$

则 $X\times Y$ 上由 j_X, j_Y 决定的弱拓扑 τ 称为乘积拓扑

Proof: $\forall U\in\tau_X, V\in\tau_Y$, $j_X^{-1}(U) = U\times Y$, $j_Y^{-1}(V) = X\times V$

$\forall p=(p_x,p_y)\in X\times Y$, 则 $M(p) = \{U\times Y, X\times V \mid \forall p_x\in U\in\tau_X, p_y\in V\in\tau_Y\}$

而 $(U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2) = (U_1\cap U_2)\times(V_1\cap V_2)$

$\Rightarrow N(p) = \{U\cap V \mid \forall p_x\in U\in\tau_X, p_y\in V\in\tau_Y\}$

$\Rightarrow \tau = \{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda\cap V_\lambda) \mid U_\lambda\in\tau_X, V_\lambda\in\tau_Y\}$ 这即为乘积拓扑定义 □

度量诱导乘积拓扑:

(X,d_X), (Y,d_Y) 是两度量空间, 在 $X\times Y$ 上定义度量:

☆ $$d(p,q) = \max\{d_X(p_x,q_x), d_Y(p_y,q_y)\}$$

$N(p) = \{B_\varepsilon(p) \mid \varepsilon>0\}$

$q\in B_\varepsilon(p) \longleftrightarrow d(q,p)<\varepsilon \longleftrightarrow d_X(p_x,q_x)<\varepsilon \wedge d_Y(p_y,q_y)<\varepsilon$

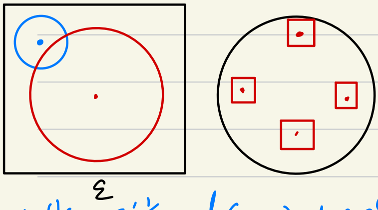
$\longleftrightarrow q\in B^X_\varepsilon(p_x)\times B^Y_\varepsilon(p_y) \Rightarrow B_\varepsilon(p) = B^X_\varepsilon(p_x)\times B^Y_\varepsilon(p_y)$

$N(p) = \{B_\varepsilon(p_x)\times B_\varepsilon(p_y) \mid \forall\varepsilon>0\}$ $B_\varepsilon(p_x), B_\varepsilon(p_y)$ 是 X,Y 中开集.

故 $\tau = \{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U\times V \mid U\in\tau_X, V\in\tau_Y\}$

$E^n\times E^m = E^{n+m}$!

这里 E^n 表示 n 维 Euclide 空间, 为了讨论的简便, 考虑 $E^1\times E^1$, 这个拓扑由上面讲的度量来诱导. 生成的基本开邻域是边长为 2ε 的开正方形 $(U\times V)$, 开集就是这些开正方形之并. 而 E^2 的基本开邻域是半径为 ε 的开圆盘.



$\forall$ 开正方形 S_ε 内一点, 都能找到 $B_\delta\subseteq S_\varepsilon$. 故 S_ε 也是 E^2 中的开集. 它们的并当然也是. 故 $\tau_{E^1\times E^1}\subseteq\tau_{E^2}$

而反过来. $\forall B_\varepsilon$ 内一点, 都能找到 $S_\delta\subseteq B_\delta$. 故 $\tau_{E^2}\subseteq\tau_{E^1\times E^1}$

$\Rightarrow \tau_{E^1\times E^1} = \tau_{E^2}$.

这其实是在说 $d(p,q)=\max\{d_X(p_x,q_x), d_Y(p_y,q_y)\}$ 和 $d(p,q)=\|\vec{p}-\vec{q}\|$ 生成的完全相同的拓扑.

映射的分量.

$f: A \to X\times Y$， $f_X \equiv j_X \circ f$ ，$f_Y \equiv j_Y \circ f$. 即 $f(a) = (f_X(a), f_Y(a))$

则称 f_X, f_Y 为f的分量.

Theorem: $f: A\to X\times Y$ 连续 iff $f_X: A\to X$，$f_Y: A\to Y$ 都连续.

Proof: $j_X^{-1}(U) = U\times Y$，$j_Y^{-1}(V) = X\times V$. 显然 j_X, j_Y 均连续，由复合映射连续性知必要性成立，现在证充分性，注意到 $\forall U\in\tau_X, V\in\tau_Y$，$f^{-1}(U\times V) = f^{-1}(U\times Y \cap X\times V) = f^{-1}(U\times Y)\cap f^{-1}(X\times V) = f^{-1}\circ j_X^{-1}(U)\cap f^{-1}\circ j_Y^{-1}(V) = f_X^{-1}(U)\cap f_Y^{-1}(V)$ 也是开集，而 $f(U_1\cup U_2) = f(U_1)\cup f(U_2)$ 可证明 $U\times V$ 开集的一般情况亦如此 $\square$

另外，乘积空间概念不难直接推广到多于两个空间的情形。而且直到现在，我们一直在更加抽象更加富于推广的拓扑空间中讨论连续性问题和收敛，好处是一旦我们选取了一个具体的拓扑，便规定了一个对应的连续性等问题和收敛，比如 $\mathbb{R}^n$ 中乘积空间结构，即可在取 Euclide 度量拓扑后直接得到。就如 Cauchy-Schwartz 不等式一样。我们要求的是一个可以放在不同情况下套用的普适一般结论.

子空间拓扑

对于拓扑空间 (X,τ)，$A\subseteq X$，令：

$$\tau|_A = \{U\cap A \mid U\in\tau\}$$

则 $(A,\tau|_A)$ 是一个拓扑空间，称为 (X,τ) 的子空间，$\tau|_A$ 称为子空间拓扑

子空间拓扑是弱拓扑.

定义含入映射 $i: A\hookrightarrow X$ ，$x\mapsto x$，则A上由i决定的弱拓扑就是 $\tau|_A$

Proof: i 决定的A中基准开邻域可以写为

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(x) &= \{i^{-1}(U_1)\cap\cdots\cap i^{-1}(U_n) \mid i(x)\in U_1,\cdots U_n\in\tau\} \\
&= \{i^{-1}(U_1\cap\cdots\cap U_n) \mid x\in U_1,\dots U_n\in\tau\} \\
&= \{i^{-1}(U) \mid x\in U\in\tau\} \\
&= \{U\cap A \mid x\in U\in\tau\}
\end{aligned}$$

显然 $\mathcal{N}(x)$ 的拓扑为 $\tau|_A$ $\square$

几个常用的性质

(1) $B\subseteq A\subseteq X \longrightarrow \tau|_B = (\tau|_A)|_B$

(2) $U\in\tau|_A$ iff $\exists V\in\tau$ s.t. $V\cap A=U$

(3) $U^c\in\tau|_A$ iff $\exists V^c\in\tau$ s.t. $V^c\cap A=U^c$ （即 U 在A中闭, V在X中闭）

①② 由定义可直接证明. 下面证明下③, 注意这里对于 U, A之补集, 即 $U^c=A/U$, 对于 V, X之补集, 即 $V^c=X/V$, 显然 ①,③ 是等价的命题.

度量空间子拓扑具有相同的度量.

(X,d) 取子空间 (A,d_A), $d_A(x,y)\equiv d(x,y)$. 则 d_A 诱导的A上拓扑即为X的子拓扑 $\tau|_A$

Proof $\forall x\in X$, 其在X上的度量开邻域为 $B_\varepsilon(x)\in\mathcal{N}(x)=\{y|d(x,y)<\varepsilon, \forall\varepsilon>0\}$

$B_\varepsilon(x)\cap A=\{y\in A|d(x,y)<\quad\}=\{y\in A|d_A(x,y)<\varepsilon\}=B^A_\varepsilon(x)$

$\mathcal{N}_A(x)=\{B^A_\varepsilon(x)|\forall\varepsilon>0\}=\{B_\varepsilon(x)\cap A|\forall\varepsilon>0\}$, A中开集是由$\mathcal{N}$中元素(并运算)得来的, 故 $\mathcal{N}_A(x)$生成拓扑即为 $\tau|_A$.

限制映射与环面

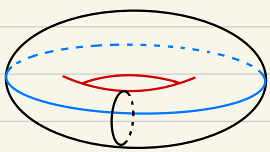
X、Y是两拓扑空间, $f:X\to Y$, A为X子空间, 则定义 限制映射:

$f|_A: A\to Y,\quad x\mapsto f(x)$; 即 $f|_A\equiv f\circ i$, $i:A\hookrightarrow X$

显然, 由于 i 连续, f连续则 $f|_A$ 连续

考虑一个甜甜圈, 数学上称为环面 $T^2=\{((2+\cos\theta)\cos\varphi,(2+\cos\theta)\sin\varphi,\sin\theta)|\theta,\varphi\in\mathbb{R}\}$

下面证明 $T^2\cong S^1\times S^1$. S^1为$\mathbb{E}^2$中单位圆.



取 $f:\mathbb{E}^2\times\mathbb{E}^2\to\mathbb{E}^3$

$f((u_1,v_1),(u_2,v_2))\mapsto((2+u_1)u_2,(2+u_1)v_2,v_1)$

从函数式可知 f 显然连续.

$S^1\times S^1$ 为 $\mathbb{E}^2\times\mathbb{E}^2$ 的子空间. 则 $f|_{S^1\times S^1}: S^1\times S^1\to T^2$ 也连续.

另外 $f^{-1}(u,v,w)=\left((\sqrt{u^2+v^2}-2,w),\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}},\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)\right)$ 对 $u^2+v^2\neq0$ 处连续, 而T^2 由于中间有"洞", 恰好不包含 $u^2+v^2=0$的点 故 $f^{-1}|_{T^2}:T^2\to S^1\times S^1$ 也连续, 即 $f^{-1}|_{T^2}=f|_{S^1\times S^1}^{-1}$

故 f是一个同胚. 一般的, 有 $T^n=\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n个}$ □

粘接引理——闭分段函数构成连续.

$\{C_1,C_2,\cdots C_n\}$ 为X的一个有限闭覆盖, 即 $C_1\cdots C_n$ 为X中闭集且 $C_1\cup\cdots\cup C_n=X$.

若 $f:X\to Y$ 使得每个 $f|_{C_k}$ 都连续 (C_k取X上子拓扑) 则 f 也连续.

Proof: $\forall$ Y中闭集A. 则

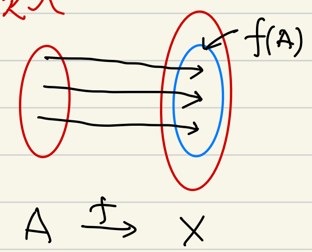
$$f^{-1}(A)=f^{-1}(A)\cap X=[f^{-1}(A)\cap C_1]\cup\cdots\cup[f^{-1}(A)\cap C_n]$$

$\Rightarrow f^{-1}(A)=f^{-1}(A\cap C_1)\cup\cdots\cup f^{-1}(A\cap C_n)$

$=[(f|_{C_1})^{-1}(A)]\cup\cdots\cup[(f|_{C_n})^{-1}(A)]$

$f|_{C_k}$ 连续 $\to (f|_{C_1})^{-1}(A)$ 闭. 有限个闭集并仍闭, 故 $f^{-1}(A)$ 闭, 故得证 □

嵌入



考虑映射 $f: A\to X$ 将 A 映射到 $f(A)\subseteq X$

若 $g: A\to f(A)$, $x\mapsto f(x)$. 且 g 是一个同胚.

则称 f 为 A 在 X 上的一个嵌入.

说白了就是 A 与 X 上一个子空间同胚. 那我们便可通过这个同胚映射将 A 嵌入 X 中. (比如包含映射 $A\hookrightarrow X$. 是 X 子空间到 X 的嵌入.)

再比如纽结理论, 就是在考虑 $S^1\to \mathbb{E}^3$ 中的嵌入问题.

一个"显然成立"但比较有用的引理: $f: X\to Y$, $x\in U\subseteq X$, U 为 x 一开邻域 若 $f|_U$ 在 x 处连续, 则 f 在 x 处连续 (某点处连续是局部性质)①

商映射与商空间

通俗点说, 拓扑学在研究连续形变下的不变量, 而这种连续形变是包括一些粘合操作的.

下面我们来具体定义拓扑中的粘合.

强拓扑: 设有一族拓扑空间 (X_λ,τ_λ) 及映射 $f_\lambda: X_\lambda\to Y$, 称 $\forall\lambda\in\Lambda$, f_λ 都连续的 **最大**拓扑 τ 为强拓扑.

这个定义相对于弱拓扑来说正好是反过来了. 强拓扑的构造就相对弱拓扑而言要简单得多, 连基本开邻域的概念都不需要。

强拓扑的构造: $\tau=\{U\subseteq Y \mid$ 每个 $f_\lambda^{-1}(U)$ 都是 τ_λ 中开集$\}$ 即 U 开 iff. $f_\lambda^{-1}(U)$ 开

商映射: (X,τ_X), (Y,τ_Y) 是两个拓扑空间, 映射 $f: X\to Y$ 是一个满射. 且 τ_Y 恰好是由 f 所决定的强拓扑, 即 $U\in\tau_Y$ iff. $f^{-1}(U)\in\tau_X$ 则称 f 为商映射②

推论: 连续开映射和闭映射都是商映射

☆ 注意商映射的定义中 $U\in\tau_X$ iff $f^{-1}(U)\in\tau_X$ 已经蕴含其连续. $f^{-1}(U)\in\tau_X\to U\in\tau_Y$ 并不是连续性蕴含的, 所以商映射是在连续满映射基础上增加一条要求 $f^{-1}(U)\in\tau_X\to U\in\tau_Y$. 所谓强拓扑就强在这一点..., 这一要求将 τ_Y 最大化).

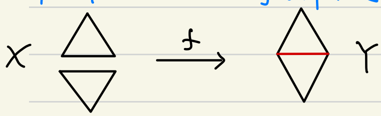
① 证明见本节习题 T5.

② 定义中说 U 闭 iff $f^{-1}(U)$ 闭 与此是等价的

同胚映射是商映射

$f: X \to Y$ 是双射且 f、f^{-1} 均连续，$\forall V \in \tau_Y \xrightarrow{f\text{连续}} f^{-1}(V) \in \tau_X$，$\forall f^{-1}(V) \in \tau_X \xrightarrow{f^{-1}\text{连续}} V \in \tau_Y$

同胚对应的是一一对应的形变（一瞬间完成的形变，没有中间过程）而商映射是胶水，它只要求是满射故会有 X 中两个不同的点映射到 Y 中同一个点，这样我们便可称 $f^{-1}(y)\big|_{y\in Y}$ 中的点被粘在一起了。Y 告诉你哪些地方可以粘，f 告诉你怎么粘。我们生活的 $\mathbb{R}^3$ 空间中日常接触到的粘连都是商映射。e.g.



复杂一点的如 $\mathbb{R}^4$ 中 Klein 瓶的构造.

一个比较重要的粘合：$f: X \to Y$ 连续，$\mathscr{C} = \{C_1, C_2, \cdots C_n\}$ 为 X 的一个有限闭覆盖，$f(C_i)$ 都闭且 $f|_{C_i}$ 是 $C_i \to f|_{C_i}(C_i)$ 的嵌入，则 $g: X \to f(X)$，$x \mapsto f(x)$ 是商映射

Proof. 下证 f 是闭映射，这样 g 也是闭映射，f 连续显然蕴含 g 连续.

$\forall$ A 为 X 中闭集. $\to A = (A \cap C_1) \cup \cdots (A \cap C_n)$，$f|_{C_i}$ 是嵌入. 即同胚 故.

A、C_i 均闭 故 $A \cap C_i$ 也闭 故 $f|_{C_i}(A \cap C_i) = f(A \cap C_i)$ 在 $f|_{C_i}(C_i)$ 中闭 即在 $f(C_i)$ 中闭. 而 $f(C_i)$ 是 Y 的子空间拓扑 故 $f(A \cap C_i)$ 是 Y 的闭集与 C_i 之交，而 C_i 闭 故 $f(A \cap C_i)$ 在 Y 中闭 $\to f(A) = \bigcup_i f(A \cap C_i)$ 在 Y 中闭，而 A 任取 故 f 是闭映射。证明要点是 $\mathscr{C}$ 有限，有限闭集之并才闭. $\square$

定理：$p: X \to Y$ 是商映射 $\to \forall f: Y \to Z$ 连续 iff $f \circ p: X \to Z$ 连续

proof is trivial $\square$

定理：$p: X \to Y$，$q: X \to Z$ 都是商映射. 并且 $p(x) = p(x')$ iff $q(x) = q(x')$ 则 $Y \cong Z$.

Proof.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ Y \arrow[rr, shift left, "f"] & & Z \arrow[ll, shift left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

要证同胚，找一个 f，f^{-1} 均连续的双射就好.

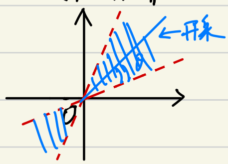
define $f: Y \to Z$ 使 $p(x) = y$ iff $q(x) = f(y)$ 这显然满足 $p(x) = p(x')$ iff $q(x) = q(x')$ 由于 q 是商映射 故 $\forall z \in Z$ $\exists x \in X$ s.t. $f(y) = q(x) = z$，故 f 是满射

而 $\forall y_1 \neq y_2 \to p(x_1) \neq p(x_2) \to q(x_1) \neq q(x_2) \to f(y_1) \neq f(y_2)$ 故 f 是单射 故 f 是双射。$q(x) = f(p(x))$ 故 $f \circ p = q$，p、q 均为商映射 $\to f$ 连续. 同样 $f^{-1}(q(x)) = y = p(x) \Rightarrow f^{-1} \circ q = p$，$p, q$ 均为商映射 $\Rightarrow f^{-1}$ 连续 故 f 为同胚 $\square$

这个定理其实在说明一个道理：p, q 将 X 粘合成 Y 或 Z，$p(x) = p(x') \leftrightarrow q(x) = q(x')$ 即是说粘合的那些点位是一致的，故 Y, Z 的区别只可能在于粘的时候"扭了几下"所以 Y, Z 还是同胚的.

射影平面与 SO(3) 流形

(实)射影平面：$\mathbb{RP}^2 = \{\mathbb{E}^3$ 中所有过原点的直线$\}$，在 $\mathbb{RP}^2$ 上定义度量拓扑 $d(l_1, l_2) = l_1, l_2$ 之间夹角弧度（取 $0 \sim \frac{\pi}{2}$ 的值），由度量拓扑诱导拓扑的定义，也就是说 $\mathbb{RP}^2$ 上开集是由那些"开圆维"中的直线构成的集合们之并。



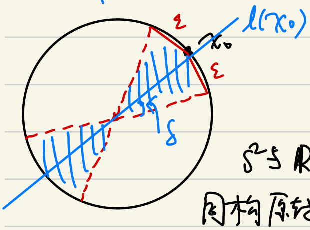
下面想象一下 $\mathbb{RP}$ 中射影平面的开集结构。

现实空间中我们观察几何体其实都是将这个拓扑空间嵌入到 $\mathbb{E}^3$ 中，但 $\mathbb{RP}^2$ 不可能嵌入到 $\mathbb{E}^3$ 中（证明很复杂）即现实中无法制作模型

众所周知 Lie 群 SO(3) 的流形结构是对径认同的实心球，即把对径点"粘起来"形成的拓扑空间，我们这里不考虑实心球，考虑 S^2 球面。

defn: $l: S^2 \to \mathbb{RP}^2$, $(x,y,z) \longmapsto \{(tx, ty, tz) \mid t \in \mathbb{R}\}$ l 显然是连续满射且 l 把 S^2 的对径点粘成了同一个点，不过要证明其的确是个粘合，需要证明其为商映射。（而上面的对径认同 B^3 实际上是 $\mathbb{RP}^3$.

Proof：$\forall S$ 中开集，其由基本开邻域 B_ε 并集构成，易知 $f(B_\varepsilon(x_0))$ 被映射成了 $B_\delta(f(x_0))$ 其中 $\delta = 2\arcsin\frac{\varepsilon}{2}$，所以开集被映射为开集，$f$ 为连续开映射且满，故 f 为商映射 $\square$



S^2 与 $\mathbb{RP}^2$ 之间不同构，通俗的讲，商映射 $\supseteq$ 同构，商映射把空间粘了一下，同构原封不动只是"捏了捏"，$\mathbb{RP}^2$ 即是 S^2 对径点粘合后的拓扑空间。

已然说过，$\mathbb{RP}^2$ 无法嵌入至 $\mathbb{E}^3$ 中观察，所以球面对径粘合这一操作也不可能在 $\mathbb{E}^3$ 中实现，但若是嵌入到 $\mathbb{E}^4$ 中呢？这实际上是在讨论映射：

$$f: S^2 \to \mathbb{E}^4, \ (x,y,z) \longmapsto (y^2 - x^2, xy, xz, yz)$$

这一映射将 S^2 粘合到 $\mathbb{E}^4$ 的子空间 $f(S^2)$ 中，且 $f(P) = f(Q)$ iff P, Q 对径 or 相等。由前面知 f 与 l 是同样的粘合，故 $f(S^2) \cong \mathbb{RP}^2$，$f(S^2)$ 嵌入到 $\mathbb{E}^4$ 中是自然的（含入映射）故 $\mathbb{RP}^2$ 可嵌入到 $\mathbb{E}^4$ 中。现商映射的存在为我们构造了一种无法想象的新空间的方法与严格叙述拓扑空间粘合后我们会发现 $\mathbb{RP}^2 \cong$ 对径认同 S^2

在线性代数或者群论中定义商空间时我们都是从等价关系出发，这里也不例外。

关系：关系是对两个元素所说的，只用于联系某两个元素的，故 X 上的某种关系就是 $X \times X$ 的某个子集，等价关系是一类特殊的关系，满足下面三条公理：

① 反身性 (reflexivity): $x \sim x$

② 传递性 (transitivity): $x\sim y \wedge y\sim z \rightarrow x\sim z$

③ 对称性 (Symmetry): $x\sim y \leftrightarrow y\sim x$

说简单点，等价关系就是对 X 的一个划分将其划分为一系列等价类子集. 也就是一个由 X 的非空子集构成的集合族 $\mathcal{R}$, s.t. $\forall x\in X$, $\exists! A\in\mathcal{R} \rightarrow x\in A$.

商空间：设 $\sim$ 是 X 上的一个等价关系，则所有等价类构成的集合 $\mathcal{R}$ 称为 X 关于 $\sim$ 的商集（$\sim$ 告诉你怎么划分，划分后子集作为元素构成的划分集合 $\mathcal{R}$ 是商集），记为 $X/\sim$

称映射 $p: X\rightarrow X/\sim$，$x \mapsto \langle x\rangle$ 为粘合映射（$\langle x\rangle$ 为 x 的等价类，即那些与 x 等价所有元素构成的集合）. p 在 $X/\sim$ 上诱导的强拓扑称为商拓扑 $\tau/\sim$，拓扑空间 $(X/\sim, \tau/\sim)$ 记为 $(X,\tau)/\sim$ 称为商空间.

前面商映射是先造了个空间 Y 用来"接收粘合结果"提供粘合定位，而商空间就是直接对 X 进行划分，划分到一起的点（同一等价类）的元素便认为粘在了一起，直接在 X 上操作. $(X,\tau)/\sim$ 便是粘合后的拓扑空间。

粘合映射就是商映射　这一点由 p 的定义可直接看出

定理：$f: X\rightarrow Y$ 是一个商映射，$\overset{f}{\sim}$ 是 X 上等价关系. 且 $x\overset{f}{\sim}x'$ iff $f(x)=f(x')$ 定义

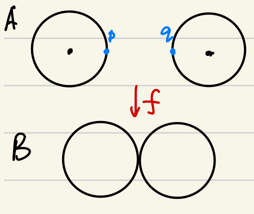
（这个性质我们在解释商映射时提到的"映射到同一个点的点认为是粘起来了"）

则 $X/\overset{f}{\sim} \cong Y$.

Proof: f, p 均为商映射. $f: X\rightarrow Y$, $p: X\rightarrow X/\overset{f}{\sim}$ 且 $f(x)=f(x')$ iff $x\overset{f}{\sim}x'$ iff $p(x)=p(x')$. 故 $X/\overset{f}{\sim}\cong Y$.（两个商映射粘合定位相同，故形成的拓扑空间同构）$\square$

也就是说，商映射本身就是一种粘合映射，粘合后的 Y 已是商空间，商映射和商空间有紧密联系，它们不过是看待拓扑空间粘合的两种等价观点罢了，实际应用中商映射更多用于两个不同拓扑空间联系，而商空间更多是对一个空间而言。

两个圆在一点处粘合后会相切.



$A: \{(x,y) \mid (x+2)^2+y^2=1 \vee (x-2)^2+y^2=1\}$

$B: \{(x,y) \mid (x+1)^2+y^2=1 \vee (x-1)^2+y^2=1\}$

其它点自成一类.

$\sim$: $a\sim b$ iff $a=b$ or $\{a,b\}=\{p,q\}$　p q粘合

$A/\sim$ 便是粘合后的空间.

用商空间对粘合的本质描述

下面来证 $A/\sim \cong B$，只用定理

$f: A\rightarrow B$, $(x,y)\mapsto \begin{cases}(x+1,y) & x<0\\ (x-1,y) & x>0\end{cases}$ 是个商映射 且 $\overset{f}{\sim}$ 与 $\sim$ 是同一等价关系即可

$A/\overset{f}{\sim} = A/\sim \cong B$

点集拓扑常用性质

邻域基：由 x 的邻域(开集的超集;包含某个基本开邻域)构成的子集族 $\mathcal{N}_x$，使得 x 的任何邻域均包含 $\mathcal{N}_x$ 中的某个邻域。

也就是说我们挑出 x 的邻域中有代表性的几个构成邻域基，其它邻域一定是 $\mathcal{N}_x$ 中某个元素的超集。

基准开邻域结构是邻域基。

因为邻域的定义便是基准开邻域超集，所以 self-evident！多说一句，邻域基的选取不是唯一的。 □

前面讨论函数在某点处连续时，要求邻域的原像是邻域，现在可以改写得更强：

$f(x)$ 在 x_0 处连续 iff 邻域基的原像是邻域

$f(x_0)=y_0$，$\mathcal{N}_{y_0}$ 为 y_0 邻域基。$f(x)$ 在 x_0 处连续 iff $\forall$ y_0 邻域 U，$f^{-1}(U)$ 为 x_0 邻域。由于邻域基也是邻域，故必要性得证。反过来 $\forall V\in\mathcal{N}_{y_0}$，$f^{-1}(V)$ 为 x_0 邻域，即 $\forall$ y_0 邻域 U $\exists V\in\mathcal{N}_{y_0}$，$V\subseteq U$，$f^{-1}(U)\supseteq f^{-1}(V)$ 为 x_0 邻域，故 $f^{-1}(U)$ 也为 x_0 邻域。 □

第一可数公理：每个点都有一个可数邻域基，满足这一公理的拓扑空间称为**第一可数空间**。

度量拓扑空间都是第一可数空间。因为 $\forall x\in X$，$\mathcal{N}_x=\{B_{\frac{1}{n}}(x)\mid n\in\mathbb{N}\}$ 就是一个可数邻域基。

第一可数空间可用序列极限刻画连续性

设 $\{x_n\}$ 是 (X,τ) 中一个点列，若点 x 满足 $\forall$ x 邻域 U，$\exists N\in\mathbb{N}$，s.t. $\forall n>N$，每个 x_n 都在 U 中，则称 x 为 $\{x_n\}$ 的一个极限。

由极限刻画连续性。

设 $x\in X$ 有可数邻域基，则 $f: X\to Y$ 在 x 点处连续 iff $\forall$ 以 x 为极限的点列 $\{x_n\}$，$\{f(x_n)\}$ 均以 $f(x)$ 为极限。

这里"$\forall$"不能丢，这类似于分析学中连续性要求"从各个方向逼近都连续"。

可以是0个，即 $\phi\in\bar{\mathcal{B}}$。

☆**拓扑基**：$\mathcal{B}$ 是 X 一个子集族，$\bar{\mathcal{B}}=\{U\subseteq X\mid U$ 为 $\mathcal{B}$ 中若干成员并集$\}$，$\bar{\mathcal{B}}$ 称为由 $\mathcal{B}$ 生成的子集族，若 $\bar{\mathcal{B}}$ 恰好是 X 上拓扑结构 τ，则称 $\mathcal{B}$ 为其**拓扑基**。

开集的并集也是开集，故我们其实是在找一些开集的集合，其它开集都能用它们的并集构成。

所有基本开邻域集簇是拓扑基

$$B=\bigcup_{x\in X}N(x)=\{所有的基本开邻域\}$$

反之，如果 B 是拓扑基，则将 B 中所有含 x 的开集取出来构成 $N(x)$.

$$N(x)=\{U\in B\mid x\in U\}$$

则 N 是 X 上的基准开邻域结构.

这两点都可以根据前面提过的"开集由基本开邻域之并构成"来说明 $\square$

B 为 X 一个子集簇，则 $\bar{B}$ 为 X 上一个拓扑 iff:

① $\bigcup_{V\in B}V=X$ ② $\forall V_1,V_2\in B\rightarrow V_1\cap V_2\in\bar{B}$.

第二可数公理：(X,τ) 存在可数拓扑基，且称 (X,τ) 为第二可数空间.

几个性质：

① 第二可数空间一定是第一可数空间.

由 $N(x)=\{U\in B\mid x\in U\}$，B 可数，则 $N(x)$ 可数，而 $N(x)$ 可作为 x 的邻域基，故得证 $\square$

② 第二可数空间可分（$\exists$ 一个可数集 A s.t. $\bar{A}=X$）

构造 $A=\{x_1,x_2,\cdots\}$ 其中 $\forall x_i\in U_i$，$B=\{U_1,U_2,\cdots\}$ 即可 $\square$

③ 可分度量空间是第二可数空间.

分离公理.（不是集合中可分的概念）

有多种不同的分离公理由 T 下标参数字来区分（T 来自德语 das Trennungsaxiom）

数字越大，要求越强.

T_0 公理：$\forall x\neq y\in X$，它们可以拓扑区分

∃开集 U，只包含 x, y 中的一个.（不区分具体是哪个）

所以很多书，讲 U 区分 x,y 之不能一定谁在 U 中

T_1 公理：$\forall x\neq y\in X$，∃ U, V 为 x, y 邻域 s.t. $U\cap V=\phi$ $\Longleftrightarrow$ 任何单点集都是闭集

☆T_2 公理☆：$\forall x\neq y\in X$，∃ U, V 为包含 x, y 的开集 s.t. $U\cap V=\phi$.（不同点有不相交开邻域（集））

满足 T_2 公理的拓扑空间称为 Hausdorff 空间

T_3 公理：任意闭集及其外一点有不相交（开）邻域，满足 T_3 称为正则空间

☆T_4 公理☆：不相交的闭集有不相交开邻域

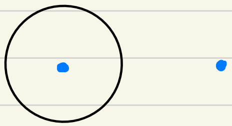
$\forall$ 闭集 A、B 且 $A\cap B=\phi$，∃开集 U, V s.t. $A\subseteq U$，$B\subseteq V$ 且 $U\cap V=\phi$

满足 T_4 公理的称为正规空间.

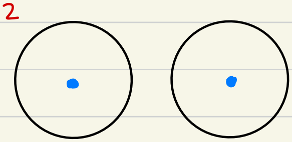
* 开邻域可换成开集

图示：(这些公理无论是说开邻域，还是说邻域都没关系)

T_0

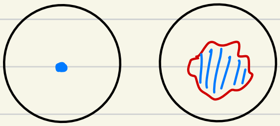


T_2



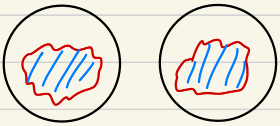
T_1 把 T_2 中开集换成邻域即可

T_3



满足 T_3 iff $\forall x\in X$ 及开邻域 W，$\exists x$ 开邻域 U, s.t. $\bar{U}\subseteq W$ □

T_4



满足 T_4 iff $\forall$ 闭集 A 及其开邻域 W，有开邻域 U, s.t. $\bar{U}\subseteq W$ □

公理之间的关系

几个公理间逐条区分的对象都不同，故一般没有蕴含关系，但 T_1，入手后，要求越来越强.

- $T_1+T_4 \to T_2$
- $T_2 \to T_1$　　在Hausdorff空间中所有单点集都是闭集

Hausdorff空间 收敛序列极限唯一

$x\neq y \to x,y$ 有两个不相交开邻域 $\lim x_n = x \to N_x$ 包含 x_N 之后所有项，则 N_y 不可能再包含它们 $\to \lim x_n \neq y$ □

度量空间是(正规)Hausdorff空间（其实可更强） 满足 $T_0 \sim T_4$

是Hausdorff空间不难验证，正规性验证一些，这里不再说明.

☆☆☆ 流形 ☆☆☆

① X 是个Hausdorff空间 (可分离)

② X 空间中每一点都有一个邻域同胚于 $\mathbb{E}^n$ 的开子集

则称 X 是一个(不带边界的)流形，维数为 n

大概上就是说这个拓扑空间在每一个局域看起来和欧氏空间差不多

☆ Urysohn 度量化定理

第二可数空间可度量化 iff 它是正规Hausdorff空间.

存在一个度量使得其诱导出拓扑 (X,τ)

定理证明及其复杂但结论很漂亮，值得记忆.

T_5: $\forall$集合 U,V $\exists$ U,V 不交的邻域.

Example: $\mathbb{R}$上取 τ: $\{(-\infty,a)\}$，称为序拓扑
满足 T_0，但不满足 T_1, T_2, T_3. 但满足 T_4!

Prop: 若 X 满足 T_1，则 $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2$，在这种条件下便可用于比较 T_x 强弱
验证这一点只需要下面的引理成立: X满足T_1 iff X的有限子集是闭集
证明: 注意到有限点集闭 $\Rightarrow$ 仅闭即可 即单点集闭

(Sorgenfrey) $\mathbb{R}$上的 $[a,b)$ 生成拓扑 (开邻域组构生成) 则满足
① $(-\infty,b)$，$[a,+\infty)$ 开 ② $[a,b)$ 既开又闭 ③ $T_0 \sim T_4$和C_1，但不满足 C_2

(Lindelöf) X 满足 C_2, T_3 则 X 满足 T_4

若 x 有可数邻域基 则 $\exists$ 邻域基 $\{V_n\}$，有 $V_m \subset V_n$ 当 $m>n$. (只需取 $V_n=\bigcap_{i=1}^{n} U_n$ 即可)
由上面引理可证 若 X 是 C_1空间，$A \subset X$，$x \in \bar{A}$. 则 A中 $\exists$ 收敛到 x 的序列

X是 C_1 $\forall x \in X$ 当 $x_n \to x$. 都有 $f(x_n) \to f(x)$ 则 $f: X \to Y$ 在 x 处连续
Proof:

	T_1	T_2	T_3	T_4	C_1	C_2
遗传性	✓	✓	✓	×	✓	✓
可乘性	✓	✓	✓	×	✓	✓

遗传性：X 有 则 其子空间也有

乘积性：X，Y 有，则 $X\times Y$ 也有

Urysohn 度量化定理

度量空间满足 C_1，$T_1\sim T_4$，但不一定有 C_2 有 C_2 的比如 $\mathbb{E}^n$

Theorem：$C_2+T_2+T_4 \Rightarrow X$ 上拓扑可由度量诱导

这些定理的思想就是 $C_1+T_1\sim T_4 \Rightarrow$ 可度量化。或许找一个强度介于 C_1 和 C_2 之间的条件可以把"$\Rightarrow$"变为"$\Leftrightarrow$"。而局部有限拓扑基正是这种思想

Urysohn's lemma：X 满足 T_4 iff $\forall A,B$ 为不交闭集，存在映射 $f: X\to[0,1]$ s.t. $f|_A=0$，$f|_B=1$，f 连续

Proof：充分性好证，下证必要性。取 $[0,1]$ 上有理数集合 Q，由于 Q 可数，故可排序为 $\{q_0,q_1,\cdots\}$。构造开集 U_{q_n} 满足 ① $\forall i\in N$，$A\subseteq U_{q_i}$，$\overline{U_{q_i}}\subseteq B^c$。② $\forall i,j\in N$，若 $q_i<q_j$，则 $\overline{U_{q_i}}\subseteq U_{q_j}$ 由 T_4 这一点始终可做到。设 A,B 有不交开邻域 U_0，V_0。对于闭集 B，$\overline{U_0}$，$\exists\, U_{q_0}$ 是 $\overline{U_0}$ 开邻域且与 B 的开邻域不交。显然 U_{q_0} 满足①②。再假设已构造出 $\{U_{q_0},\cdots,U_{q_{n-1}}\}$，对于 q_n，可以找 q_i,q_j，$q_i<q_n<q_j$ 且 q_i,q_j 之间无 $q_0\cdots q_{n-1}$ 中元素。考虑闭集 $\overline{U_{q_i}}$ 与 $U_{q_j}^c$ 便可由 T_4 找到合适的 U_{q_n}

Tietz扩张引理.

X 满足 T_4, A 为 X 中闭集. 则 $\forall A$ 中连续函数 $f: A \to [0,1]$ 则 $\exists X$ 上定义连续函数 $g: X \to [0,1]$ s.t. $g|_A = f$, 此定理中 $[0,1]$ 可改为 $\mathbb{E}$ 也成立.

下面证明 X 满足 T_2, T_4, C_2. 则可嵌入 $\mathbb{E}^\omega$ 中, 即 Urysohn 定理. 这里 $\mathbb{E}^\omega$ 是 $\mathbb{E}^\infty$ 的 2-范数有限的子空间 即 Hilbert 空间.

Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理

一个拓扑空间X可度量化 iff:

(1) X是正规 Hausdorff 空间

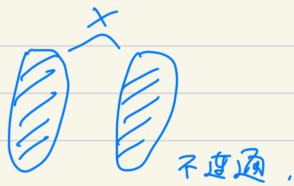
(2) X有一个σ-局部有限 或是σ-局部离散的拓扑基.

σ-局部有限: $\mathcal{A}$是X的子集簇, 且$\forall x\in X$, 存在x的一个邻域只与$\mathcal{A}$中有限多个元素相交非空, 则称$\mathcal{A}$局部有限; 若 $\mathcal{B}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_n$ 且每个$\mathcal{A}_n$局部有限, 则称$\mathcal{B}$为一个σ-局部有限子集簇.

σ-局部离散: 与σ-局部有限只有一点不同, 要求存在x的一个邻域只与$\mathcal{A}$中至多一个元素相交非空。

连通性

直观定义: 不能拆分



严格定义:

① 不能分解为两个非空不相交开子集的并

② 不能分解为两个非空不相交闭子集的并

③ 不含既开又闭的非空真子集

④ 既开又闭的子集只有$\varnothing$及自身

这四条定义等价, 若$A\subseteq X$且A取X上子空间拓扑后连通, 则称A为X的连通子集

• $\boxed{\text{连通性是拓扑不变量!!!}}$

proof: 若 $X\cong Y$, X连通 若Y不连通, 则 $Y=B\cup B^c$ 且 $B\neq\varnothing$, $B\in\tau_Y$, $B^c\in\tau_Y$, $B\neq Y$

那X可以分成 $X=f^{-1}(B)\cup f^{-1}(B^c)=f^{-1}(B)\cup[f^{-1}(B)]^c$. 由f、$f^{-1}$连续性 即可说明存在矛盾. 而 $X\cong Y$ iff $Y\cong X$. 所以另一边结论也得证 □

• $\boxed{\text{连通空间在连续映射下的像集仍连通}}$ □

由于商映射也是连续映射, 此定理告诉我们连通空间的商空间仍连通.

• 拓扑学意义下的介值定理:

$f: X\to\mathbb{R}$ 连续且X连通, 则 $\forall a,b\in f(X)$ 及 $c\in(a,b)$, $\exists\, x\in X$, s.t. $f(x)=c$

要证明这一定理，只需证明"ℝ的子空间A连通 iff A是一个区间" □

比较有用的一个引理：

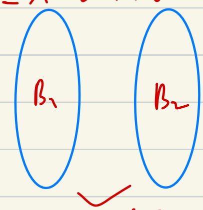
若X_0是X的既开又闭的子集，A是X的连通子集，则或者$X_0\cap A=\emptyset$，或者$A\subseteq X_0$.

• A连通 → $\bar{A}$连通.

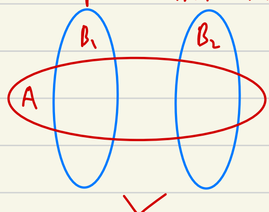
Proof: if $\bar{A}$不连通 → $\exists\, B\cap C=\emptyset$, $\bar{A}=B\cup C$, B既开又闭. 则由 $A\cap B\neq\emptyset$ 的引理 → $A\subseteq B\subseteq\bar{A}$. 而$\bar{A}$是包含$A$最小闭集 → ① $B=A\to\bar{A}=A$ ② $B=\bar{A}\to$矛盾 □

• 并不是被连通子集覆盖就一定连通，但只要有一个核心就好.

设X有一个连通覆盖$\mathcal{A}$，即$\mathcal{A}$为X子集族，且元素均为连通子集，且$\bigcup\mathcal{A}=X$. 若$A\subseteq X$为X的一个连通子集且A与$\mathcal{A}$中任一元素相交非空，则X连通.



$X=B_1\cup B_2$不连通



$X=A\cup B_1\cup B_2$连通. X有一个核心A.

这个定理还可以更强：只要$\mathcal{A}$中任意两个元素不相互分离即可. A,B分离 iff $\bar{A}\cap\bar{B}=\phi$

• 两个非空连通空间的乘积空间连通.

Proof: $\mathcal{B}=\{X\times\{y\}\mid y\in Y\}$ 由于$X\times\{y\}\cong X$，故$\mathcal{B}$为X连通覆盖. 而 $A=\{x\}\times Y$ 与$\mathcal{B}$中任一元素相交非空（x是X中任意某点）且$A\cong Y$连通. 故 $X=\bigcup\mathcal{B}$ 连通 □

• 连通分支：最大的连通子集.

若$A\subseteq X$连通且 $\forall\, B\supseteq A$连通 → $B=A$ 则A为X一连通分支.

• X的每个非空连通子集均含于唯一一个连通分支. 且X可以分解为一些互不相交的连通分支的并集（X不必连通）

Proof: $A\subseteq X$连通 则 $\mathcal{B}=\{B\supseteq A\mid B连通\}$ → $\bigcup\mathcal{B}=T$连通 $\forall\, C\supseteq T$连通. → $C\supseteq\bigcup\mathcal{B}\supseteq A$ → $C\in\mathcal{B}$ → $C\subseteq\bigcup\mathcal{B}$ → $C=\bigcup\mathcal{B}=T$. 故T为包含A的连通分支. 这是存在性. 而任意一个含A的连通分支Z必定是$\mathcal{B}$中元素 即 $Z\subseteq T$. 而由于Z是连通分支故有 $Z=T$ 故唯一性得证.

单点集$\{x\}$自然是连通的，而每个$\{x\}$必含于某个唯一的连通分支T_x. 故这说明

$X = \bigcup_x Y_x$ 而这些 Y_x 之间不能有交集，否则 $Y_{x_1} \cap Y_{x_2}$ 中元素 同时处于两个不同的连通分支. 这在前面唯一性证明中已说过. $\square$

• 连通分支都是闭子集.

Proof: A连通 → $\bar{A}$连通. A是连通分支. 故A是最大的 而 $\bar{A} \supseteq A$ → $\bar{A} = A$ iff A闭 $\square$

• $\forall x \in X$ 都有一个连通邻域 → X的连通分支都是开集.

Proof: $\forall$连通分支A中点x. U为x连通邻域 而 由于所属连通分支唯一, U, x同属同一连通分支, 即A → $U \subseteq A$. 而x任意取. 故A是其中每一个点之邻域 → A开.

• 局部连通.

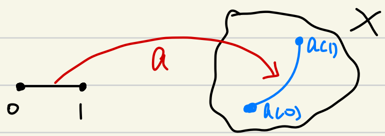
若 $\forall x \in X$, x有由连通邻域构成的邻域基. 则称X局部连通.

并非就是字面意义上的局部. 也是要求对全部X中点成立.

Remark: 局部连通与连通之间无蕴涵关系

道路连通性.

道路: 连续映射 $a:[0,1] \to X$ 称为一条从$a(0)$到$a(1)$的道路.

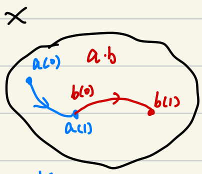


a这个映射叫道路. 而不是$a([0,1])$这条曲线

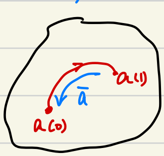
• 点道路: $e_{x_0}:[0,1] \to X$, $t \mapsto x_0$

• 乘积道路: $a, b:[0,1] \to X$ 满足 $a(1) = b(0)$ 则下面映射为乘积道路

$$ab : [0,1] \to X, \quad t \longmapsto \begin{cases} a(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ b(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$



就是a, b硬相连再以两倍速度去走



就是走的方向反过来

• 逆道路. $a:[0,1] \to X$. $\bar{a}:[0,1] \to X$, $t \mapsto a(1-t)$

两个点是否由某个道路相连是一个等价关系.

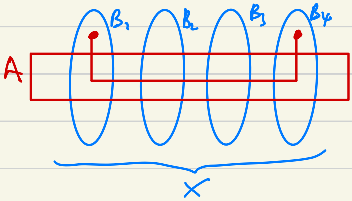
X上可定义关系 $\sim$. $x \sim y$ iff $\exists X$上一条道路连接x, y.

道路连通的定义!

若 $\forall x, y \in X$, X中存在一条连接x, y的道路, 则X道路连通, 由上面等价关系. 道路连通的自成一类.

道路连通空间中定理与连通空间形式上一致.

- 道路连通空间在连续映射下像集道路连通
- 设 X 有道路连通覆盖 $\cup\mathcal{B}$，若此时 X 还有一个道路连通子集 A 与 $\mathcal{B}$ 中的每个都相交非空. 则 X 道路连通.



- 两个非空道路连通空间的乘积道路连通.

道路连通性比连通性更强

- 道路连通空间一定连通.

Proof: X 道路连通 $\longrightarrow$ $\forall x, y\in X\ \exists\ a_x: [0,1]\mapsto X$, $a(0)=x$, $a(1)=y$. 令 $B_x = a_x[0,1]$

则 $\bigcup_{x\in X} B_x = X$ 为一个连通覆盖.(因为 a_x 连续, $[0,1]$ 连通, 故 B_x 连通) 而 $\forall B_x$, $B_x\cap\{x\}\neq\phi$

且单点集连通. 故 X 连通 $\square$

连通但不道路连通的例子: $X = \{(x,y)\in \mathbb{E}^2 \mid x>0,\ y=\sin\frac{1}{x}\}$ (topologist's sine curve)

道路连通分支: 与连通分支定义类似, 就是最大的道路连通子集.

道路连通分支就是等价类:

☆ $\forall x\in X$, $\langle x\rangle \equiv \{y\in X \mid x, y$ 间有道路相连$\}$, $\langle x\rangle$ 是含 x 的道路分支.

Proof: $\forall\ y, z\in\langle x\rangle$, $a: x\to y$, $b: x\to z$ 则 $\bar{a}b: y\to z$. 故 $\langle x\rangle$ 道路连通. 若 $A\supseteq\langle x\rangle$ 且 A 也道路连通. 那 $\forall y\in A$, y 与 x 都有道路相连, 故 $y\in\langle x\rangle \longrightarrow A\subseteq\langle x\rangle \longrightarrow A=\langle x\rangle$ $\square$

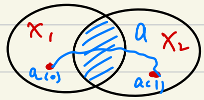
—由 X 的每个非空道路连通子集都含于唯一的一个道路分支内, X 可以分解成一些两两不相交的道路分支的并集 $\square$

命题: X_1, X_2 是 $X=X_1\cup X_2$ 中的开集 $a(0)\in X_1$, $a(1)\in X_2$, a 为一个道路. 求证 $a^{-1}(X_1\cap X_2)\neq\phi$

proof: 由于 $a(0)\in X_1$, $a(1)\in X_2$ 故 $X_1\neq\phi$, $X_2\neq\phi$. 又 a 连续 故 $a^{-1}(X_1)$, $a^{-1}(X_2)$ 均为开集. 且非空. 而 $a^{-1}(X_1)\cup a^{-1}(X_2) = a^{-1}(X_1\cup X_2) = a^{-1}(X) = [0,1]$, $[0,1]$ 连通. 故 $a^{-1}(X_1)\cap a^{-1}(X_2)\neq\phi$ 即 $a^{-1}(X_1\cap X_2)\neq\phi$ $\square$

这个命题要说明的问题看起来很显然, 就像下图一样, 道路要连接 X_1, X_2

中两点，则必然会路过 $X_1\cap X_2$ 区域.



Fact：(道路)连通分支的个数也是拓扑不变的. 在代数拓扑上，道路连通分支常记为 π_0。与 π_1 基本群 π_n 高阶同伦群一起构成拓扑不变量.

Theorem: 局部道路连通 + 连通 $\Rightarrow$ 道路连通

这个定理可以用下面的命题看出：

若 X 的每一点，有邻域 U_x s.t. x 与 U_x 中每一点都可用 X 上的道路连接，则

① X 的道路分支都是既开又闭的

② X 的连通分支就是道路分支.

证明：① 先证道路分支是开的，设 A 是道路分支. 则 $\forall x\in A$ $\exists U_x$ s.t. $U_x\subseteq A$. 故 $x\in A^\circ$ 即 $A=A^\circ$ 故 A 开

再证 A 闭. A^c 即为不能用道路与 A 中元素相连的元素. 也就是其它道路分支的并. 而道路分支开 故 A^c 开 故 A 闭

② 设 A 是道路分支. $B\supseteq A$ 为连通分支. (因道路连通 $\Rightarrow$ 连通. 故道路分支一定是连通分支子集) A 在 X 中既开又闭. 则 A 在 B 中既开又闭 由于 B 连通. 故 $A=\phi$ or $A=B$ 显然 $A\neq\phi$ 故 $A=B$

有了这一引理. 再来看上面定理. 局部道路连通则保证了引理为真，连通是在说只有一个连通分支. 而由引理，这一连通分支即为道路连通分支. 故 X 也道路连通.

紧致性

紧致性.

- 若拓扑空间 X 的任意开覆盖有有限子覆盖，则称 X 紧致.

  若 X 子集 A 取子空间拓扑后紧致则称 A 为 X 的一个紧致子集.

  这时，要选取 $(A, \tau_{X(A)})$ 中的开集来覆盖 A，但有如下定理:

- A 是 X 的紧致子集 iff 任意由 X 中开集构成的 A 的覆盖有有限子覆盖.

proof: 先证充分性. 设 $\forall \mathcal{U}$ 覆盖 A. 则 $\forall U \in \mathcal{U}$, $U \in \tau_A$. 则 $\exists V \in \tau_X$. s.t. $U = V \cap A$. 所有的 V 构成了 A 在 X 中的覆盖., 有有限子覆盖 $V_1, V_2, \cdots$ 再选出这些 V_i 得到 U_i, 便是 $\mathcal{U}$ 的有限子覆盖.

再证必要性: 设 $\mathcal{V}$ 是 A 在 X 中的开覆盖. 则 $\mathcal{U} = \{V \cap A \mid V \in \mathcal{V}\}$ 是 A 的开覆盖. 由于 A 紧致. 故 $\mathcal{U}$ 有有限子覆盖 $U_1 = V_1 \cap A, U_2 = V_2 \cap A \cdots$ 则 $V_1, V_2, \cdots$ 构成了 A 在 X 上的有限子覆盖. $\square$

X 紧致，则其任意闭子集紧致.

proof: A 为 X 闭子集. $\forall$ X 中开集构成的 A 的开覆盖 $\mathcal{U}$, 则 $\mathcal{U} \cup \{A^c\}$ 构成 X 的开覆盖，有有限子覆盖 $U_1, U_2, \cdots U_n$. 则 $\{U_i \setminus A^c\} \in \mathcal{U}$ 为 A 在 X 上的有限子覆盖. 得证. $\square$

(Heine-Borel) $\mathbb{E}^1$ 的子集紧致 iff 是有界闭集.

proof: 这一定理证明首先得用到一个引理, $[a,b]$ 在 $\mathbb{E}^1$ 中紧致. 则 A 为有界闭集 $\Rightarrow$ A 为某个 $[a,b]$ 的闭子集 $\Rightarrow$ A 紧致. 反过来, $A \subseteq \mathbb{E}^1$ 紧致. 若 A 不是有界的 则 $\{(-r,r) \mid r>0\}$ 是 A 在 $\mathbb{E}^1$ 上的开覆盖, 无有限子覆盖 (因为 A 无界, $r \to \infty$), 若 A 不是闭集 $\Rightarrow$ $\bar{A} \neq A$ $\Rightarrow$ $\exists x_0 \notin A$ 但 $x_0 \in A'$. 即 $\forall \delta > 0$, $(x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus x_0 \cap A \neq \phi$ 取集族. $\{(-\infty, x-\varepsilon) \cup (x+\varepsilon, +\infty) \mid \varepsilon > 0\}$, 这是 A 在 $\mathbb{E}^1$ 上的一个开覆盖. 但由于 δ 可以为任意小, 相应地 ε 也要任意取小, 故不存在有限子覆盖. $\square$

紧致性是拓扑性质.

- X 紧致, $f: X \to Y$ 连续, 则 $f(X)$ 紧致. $\square$

紧致空间上的实值函数一定能取到最大最小值 (实分析定理的拓扑推广)

proof: $f: X \to \mathbb{E}^1$ 连续, X 紧致 $\to f(X)$ 紧致 $\to f(X)$ 为有界闭子集 □

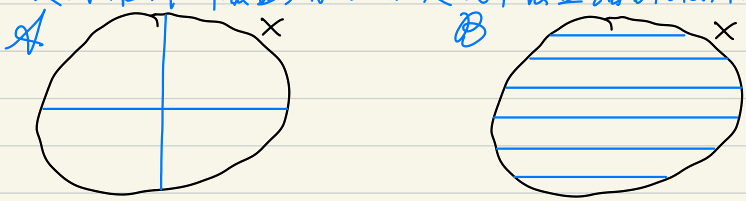
- X, Y 紧致, 则 $X \times Y$ 也紧致.

这里不作证明(并不复杂)但讨论下该定理适用范围, 由这个定理可以归纳得出任意多有限个紧致空间乘积仍然紧致. 对于无限多的情况, Tychonoff 证明了也成立. 但证明中需要用到选择公理. 且与之等价.

局部紧致性: 任意一点都有紧致邻域, 紧致性 → 局部紧致性. □

开加细 (open refinement): 如果 X 的两个开覆盖 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 满足 $\forall B \in \mathscr{B}$ $\exists A \in \mathscr{A}$, s.t. $B \subseteq A$, 则称 $\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{A}$ 的开加细.

开的意义就是 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ 都是开覆盖, 加细就是两个覆盖细分程度不同!



网眼细小开集覆盖 X.

局部有限: X 子集簇 $\mathscr{U}$ 满足 $\forall x \in X$, $\exists x$ 的一个邻域只与有限个 $\mathscr{U}$ 中元素相交非空.

仿紧: X 的任意开覆盖都有一个局部有限的开加细.

- 任何度量空间都仿紧

最后我们证明一个很有用的结论.

但闭不一定紧致.

Lemma: Hausdorff 空间的紧致子集均为闭集. ⇒ 紧致 T_2 满足 T_3, T_4

proof: 设 A 在 Hausdorff 空间 X 中紧致. $\forall x \in A^c \to x \notin A$ $\forall y \in A$, 则 $\exists x, y$ 的不相交开邻域 U_y, V_y, 由于 y 是任取的, 故 $\{V_y \mid y \in A\}$ 是 A 在 X 上的开覆盖, 有有限子覆盖 $V_{y_1}, \cdots, V_{y_n}$, 而每个 U_{y_i} 与 V_{y_i} 不相交 故 $U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$ 与每个 V_{y_i} 都不相交, 故 $U \subseteq A^c$ 而 U 还是 x 的开邻域. 故 A^c 为 x 邻域 即 $x \in (A^c)^\circ$. 而 x 是任取的, 故 $(A^c)^\circ = A^c \to A^c$ 开 $\to A$ 闭. □

☆ Theorem: 设 X 紧致, Y 是 Hausdorff 空间, 而 $f: X \to Y$ 是连续映射.

(1) f 是满射, 则 f 是商映射 *

(2) f 是双射, 则 f 是同胚

proof: X 紧致, f 连续 $\forall A \subseteq X$, A 为闭子集则 A 紧致 则 $f(A)$ 紧致. 则 A 闭. 故 f 一定是闭映射, 故得证 □

* 其实, 从群论上看, 商映射类似于同态, 同胚类似于同构

这一定理的作用就是让我们用一些好研究的小块紧致空间粘出复杂的拓扑形状,或是反过来将复杂空间拆分成一些小块进行研究.

列紧: 如果拓扑空间 X 中的任意序列具有收敛子列. 则称 X 列紧.

Bolzano-Weierstrass定理: 有界实数列一定有收敛子列.

列紧性证明相较于紧致性证明要容易得多, 而且对于度量空间有下面重要定理.

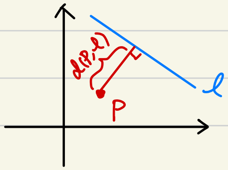
度量空间紧致当且仅当其列紧.

这个定理证明我们不过多深究. 但其证明中有个比较重要的引理这里陈述一下:

Lebesgue 引理: 在列紧度量空间 X 上任取开覆盖 $\mathcal{U}$, $\exists L>0$ (L 称为 Lebesgue 数). s.t. $\forall 0<\delta<L$ 及 $x\in X$, $\exists U\in\mathcal{U}$ s.t. $B_\delta(x)\subseteq U$.

L 其实是函数 $f: X\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \sup\{d(x,U^c)\mid U\in\mathcal{U}\}$ 的最小值.

$d(x,A)\equiv\inf\limits_{a\in A} d(x,a)$ 表示点到集合的距离, 这一定义可看作是点到直线距离的推广:



P与 l 距离就定义为最小值(这里也可指是下确界)

一点紧化:

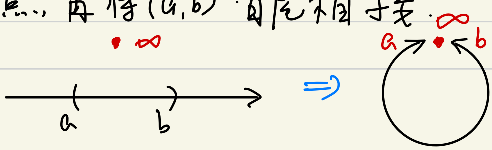
设 (X,τ) 是非紧致的 Hausdorff 空间. 在 X 中添入一个新元素 Ω. 所得集合记为 X^*, 规定 X^* 上拓扑 (可证明的确满足拓扑公理)

$$\tau^* = \tau\cup\{X^*\}\cup\{X^*\setminus K \mid K\text{为}X^*\text{上紧致子集}\}$$

则 (X^*,τ^*) 是紧致的, 且称 (X^*,τ^*) 为 (X,τ) 的一点紧化.

所以任何一个 Hausdorff 空间均可嵌入到一个紧致空间中研究 (不难证明 (X,τ) 是 (X^*,τ^*) 子拓扑) 但 (X^*,τ^*) 不一定是 Hausdorff 空间, 一般地可证明: 若 (X,τ) 是局部紧致的 Hausdorff 空间则 (X^*,τ^*) 是 Hausdorff 空间.

直观上看, 对 $\mathbb{E}^1$ 上 (a,b) 开区间单点紧化相当于找了个抽象的无限远点, 再将 (a,b) 首尾相接.



即 $(a,b)^*\cong S^1$, or say $(\mathbb{E}^1)^*\cong S^1$

可证明 $(\mathbb{E}^n)^*\cong S^n$

$X\times Y$ 紧致 iff X,Y 都紧致是下面更一般定理的特例:
(Tychonoff) $\forall$ 指标集 I，I 可以可数也可不可数，则 $X^I=\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ 紧致 iff $\forall\alpha\in I$，X_α 紧致.（要用选择公理证）

比如 $I=[0,1]$，I^I 紧致．I^I 可以视作为 $[0,1]\to[0,1]$ 上所有映射之集合.

Eample：① I^I 紧致但不列紧
② E^∞ 的子集 S^∞．即 $\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2=1$，$S^\infty$ 有界且闭但不列紧 故不紧致.

Hausdorff 空间中紧致子集之交仍紧致:

proof：X Hausdorff．$A,B\subseteq X$ 紧 则 A,B 闭 则 $A\cap B$ 闭 且 $A\cap B$ 是 A 的闭子集．故 $A\cap B$ 相对于 A 紧致．由子集拓扑的定义，$A\cap B$ 在 X 上也紧

Lemma. X 紧且 C_1，则 X 列紧.
任取 X 序列 $\{x_n\}$．若 $\forall p\in X$，$\exists U_p$ 只包含 $\{x_n\}$ 中有限项．即 $\{x_n\}$ 不收敛到 p．$\bigcup_{p\in X}U_p$ 构成 X 的一个开覆盖 $\Rightarrow$ 有有限子覆盖 $\Rightarrow$ $X=\bigcup_{p\in X}U_p$ 只包含 $\{x_n\}$ 中有限项矛盾 故 $\exists p$. s.t p 任意开邻域均包含 $\{x_n\}$ 中无穷多项．这证明了 X 紧 则 X 中序列都有极限．由于 C_1，存在 p 的一递减邻域基 $U_1\supseteq U_2\cdots\supseteq U_n\cdots$，$U_i\cap\{x_n\}\neq\varnothing$．$\forall i$ 其中一点 x_{n_i}．则 $\{x_{n_i}\}$ 为 $\{x_n\}$ 子列．$\forall p$ 邻域 则其包含某个 U_k 则 其包含所有 $\{x_{n_i}\}$ 中 $i\geq k$ 的项（无穷多）故 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于 p.
故 任意序列都有收敛子列

闭曲面の拓扑分类

★带边流形.

def1: 如果Hausdorff空间 M上每个点都有开邻域同胚于 $\mathbb{E}^n_+ \equiv \{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{E}^n \mid x_n\geq 0\}$ 的开子集 则称M为一个带边流形，n是M的维数 dim M.

P.S. 这一定义是常规数学家口中的流形_

$\mathbb{E}^n_+$ 中点有两类，一类是内点，x_n 大于0. 这样的点都有一个开球形邻域同胚于全空间 $\mathbb{E}^n$. ($(r,\theta)\longleftrightarrow \tan(\frac{\pi r}{2\varepsilon},\theta)$ 知道一个同胚)，还有一类是边界点，其中一些 $x_n=0$ 这些点也能类似建立一个开半球邻域到 $\mathbb{E}^n_+$ 全空间的同胚，故我们给出下面带边流形的等价定义.

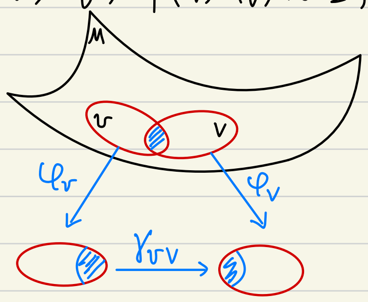
def2: Hausdorff空间X上每一点都有开邻域同胚于 $\mathbb{E}^n$ 或 $\mathbb{E}^n_+$

★局部坐标系.

如果φ是从M的开子集U到 $\mathbb{E}^n_+$ 的开子集φ(U)的同胚，则称(U, φ)为M上的一个局部坐标系，如果流形M上有两个局部坐标系 (U,φ_U) 和 (V,φ_V) 则称

$$\gamma_{UV}: \varphi_U(U\cap V)\to\varphi_V(U\cap V),\quad x\mapsto\varphi_V(\varphi_U^{-1}(x))$$

为从 (U,φ_U) 到 (V,φ_V) 的坐标变换



流形粗略地讲就是每一点附近都可看作是一小块欧氏空间，所以可以在流形上某些局部建立同胚于 $\mathbb{E}^n_+$ 的坐标系. 所谓流形，要点是这些局部坐标系拼起来能够描述整个流形M本身. 即下面定理.

★ Hausdorff空间M是流形 iff ∃ M上的一簇局部坐标系 $\mathcal{A}$，使得 $\bigcup_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}} U = M$

我们这里考虑的是一般的拓扑流形. 显然 $\mathcal{A}$ 的选取是多种多样的. 若是存在 $\mathcal{A}$ 满足一些特定的要求，我们便称其为流形M上的某某结构. 并称 $(M,\mathcal{A})$ 为某某流形. 如微分流形、复流形等.

流形的内部与边界（与拓扑空间中 A°, ∂A 的定义完全不是一回事）

设M是一个n维流形. $x\in M$ 有开邻域U以及从U到 $\mathbb{E}^n$ 的开子集同胚φ. 且 $\varphi(x)=\vec{0}$

则称 x 为 M 的内点．如果 $y\in M$ 有开邻域 V 以及 V 到 E^n_+ 的开子集同胚 φ，且 $\varphi(y)=\vec{0}$

则称 y 为 M 的边界点，$y\in\partial M$

光从定义上看可能会认为内点也可能是边界点，但由于 $E^n_+\ncong E^n$，有下面定理

一个流形上的点不是内点就是边界点，且不可能既是内点又是边界点． $\square$

此定理证明要用到代数拓扑相关知识

流形边界的边界是空集．$\partial\partial M=\phi$

一维流形的边界是一个离散点集，如果 $n>1$，则 n 维流形的边界是一个边界为空集的 $n-1$ 维流形．

证明并不复杂，我们仅指出这一定理与微分形式中的 Poincare 引理 $dd\omega=0$ 有巧妙关联．

每个紧致流形都是满足第二可数公理的正则 Hausdorff 空间

Proof：流形自然是 Hausdorff 空间．下证明其正则，即 $\forall$ 闭集 A 及 $x\notin A$，它们有不相交的邻域．事实上紧致空间一定局部紧致，而局部紧致性 + Hausdorff 空间 $\Longrightarrow$ 正则性．

此证明可参见 Munkres《拓扑学》定理 29.2 与引理 31.1 即可证明．另外下面说明 X 第二可数．M 是流形 $\rightarrow\forall x\in M\ \exists U_x$ 为同胚于 E^n or E^n_+ 的开邻域，则 $\bigcup_{x\in M}U_x$ 构成 M 开覆盖 $\xrightarrow{M\text{紧致}}$ 有限子覆盖 $\{U_1,U_2\cdots U_n\}$ 且其中 U_i 均同胚于 E^n or E^n_+ 故 U_i 满足 C_2．故 U_i 有可数拓扑基 $\mathcal{A}_i$．显然 $\bigcup\mathcal{A}_i$ 也是 M 的拓扑基且由 $\mathcal{A}_i$ 可数，M 也满足 C_2 $\square$

而正则性 → 正规性．再由 Urysohn 定理有：紧致流形均可度量化．

闭流形：边界为空的流形．

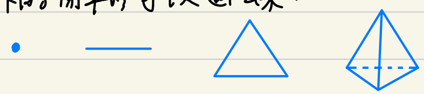
曲线/面：一/二维连通流形

一维闭曲线的分类比较 trivial，可证明任何闭曲线均同胚于 S^1．主要还是闭曲面的分类值得探究．

单纯复形（组合拓扑领域基础概念）

E^m 中 $n+1$ 个点 $P_0,\cdots,P_n$ $(n>0)$ s.t. 向量组 $\overrightarrow{P_0P_1},\cdots,\overrightarrow{P_0P_n}$ 线性无关，则称这 $n+1$ 个点处于一般位置，或称几何无关。且称 E^m 中子集 $\sigma=\{P\in E^m \mid \overrightarrow{OP}=t_0\overrightarrow{OP_0}+\cdots+t_n\overrightarrow{OP_n},\ t_0+\cdots+t_n=1,\ t_0>0,\cdots,t_n>0\}$ 为 E^m 中一个几何单纯形，$P_0,\cdots,P_n$ 称为 σ 的顶点，n 为其维数。（E^m 中 m 只是表示你在几维空间中放入（嵌入）这个几何单形，与几何单形本身的维数无关）而 σ 的闭包 $\bar{\sigma}$ 为 σ 对应的几何闭单形。

三维以下的闭单形可以画出来：



它们都是闭的（带边）流形，去掉边界后就是对应的单纯形。

面：σ、τ 是两个几何单形（不必有 $\dim\sigma=\dim\tau$），并且 σ 的顶点集含于 τ 的顶点集中，则称 σ 为 τ 的一个面，$\sigma\leq\tau$。显然 $\tau\leq\tau$。不等于 τ 的面称为 τ 的真面。

在有限元计算软件或者3-D建模软件中对曲面、立体的剖分都可以完全剖分为单纯形，所以就有了下面单纯复形的概念。

几何单纯复形：

K 是一个由 E^m 中的几何单形构成的集合，满足：

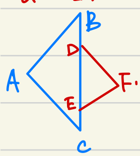
(1) $\forall\sigma\in K$，其所有面也属于 K

(2) $\forall\sigma,\tau\in K$，$\sigma\cap\tau=\phi$

则称 K 为几何复形。K 中所含单形的最大维数为 K 的维数 $\dim K$。

注意，上面定义中 σ,τ 都是开单形，但 σ 本身不能构成一个复形，$\bar{\sigma}$ 可以。

因为由(1)，$\triangle ABC$ 中顶点 A,B,C，以及 AB，BC，AC 都是 $\triangle ABC$ 的面，它们也要属于 K，故 $\overline{\triangle ABC}$ 才构成一个复形。而(2)告诉我们两个单形要么不粘合，要么只能在顶点处粘合。或者说闭单形闭交于公共面。



就单形 $\triangle ABC$，$\triangle DFE$ 而言 $\triangle ABC\cap\triangle DFE=\phi$，但它们的面 BC，DE 也属于 K，而 $BC\cap DE\neq\phi$ 所以矛盾。

从这一观点来看，几何复形还不是简单地用单形拼凑，它有一套规则。我们要知道 K 怎么构造的，只用知道单形之间顶点如何相连（比如用同一个字母标识要粘合的顶点）最后根据(1)(2)还原成 K 即可。这一观点可抽象出"抽象单形"的概念。

另外说一句，K 只是一个集合，没有拓扑结构，我们可以为它赋予 E^m 子空间拓扑 $\bigcup_{\sigma\in K}\sigma=|K|$

称为K的多面体.

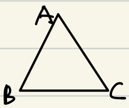
抽象单形

任何一个有限集σ称为一个抽象单形. σ的元素称为其顶点, $\dim\sigma = \mathrm{card}\,\sigma - 1$, 如果σ和τ是两个抽象单形, 且 $\sigma\subseteq\tau$, 则称σ为τ的一个面 $\sigma\le\tau$.

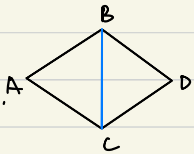
抽象复形

K是由抽象单形构成的集合(也就是集族)且 $\forall\sigma\in K$, 其所有面也属于K, 则称K为一个抽象单纯复形, K中单形的顶点也称为K的顶点, $\dim K = \max_{\sigma\in K}\{\dim\sigma\}$, 若 $K'\subseteq K$ 也构成复形则称K'为K之子复形.

这里定义上不如几何复形一样要求相交为空. 因为我们现在只记录了顶点信息, 已经自动满足这一点.

J. 

$K=\{\{A\},\{B\},\{C\},\{A,B\},\{A,C\},\{B,C\},\{A,B,C\}\}$

J. 

$K=\{\{A\},\{B\},\{C\},\{D\},\{A,B\},\{A,C\},\{B,C\},\{B,D\},\{C,D\},\{A,B,C\},\{B,C,D\}\}$

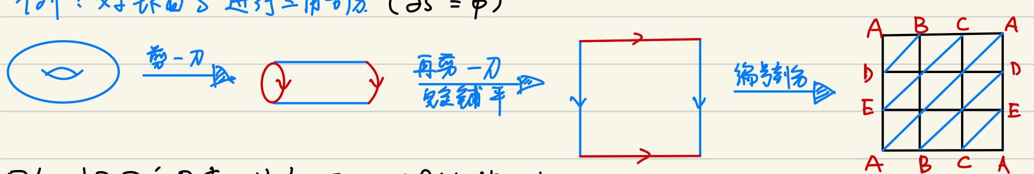
任取一个几何复形J, 我们都能写出对应的抽象单形 $K=\{\sigma\text{的顶点集}\mid\sigma\in J\}$

反过来若 ∃J的顶点集→K的顶点集的双射φ s.t. $\{v_1,\dots,v_k\}$ 为J中某几何单形顶点集 iff $\{\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_k)\}$ 为K中的某抽象单形, 则称J为K的几何实现

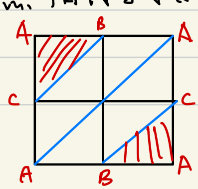
K是一个有限抽象复形(顶点集有限) 则K一定有几何实现, 且这些几何实现相互同胚 □

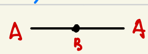
但是并不是所有流形都能用单纯形进行剖分. 如果M是一个拓扑空间, 且∃抽象复形K使得 $|K|\cong M$ 则称M为可剖分空间. 称K为其单纯剖分

例: 对环面 S^2 进行三角剖分 ($\partial S^2=\phi$)

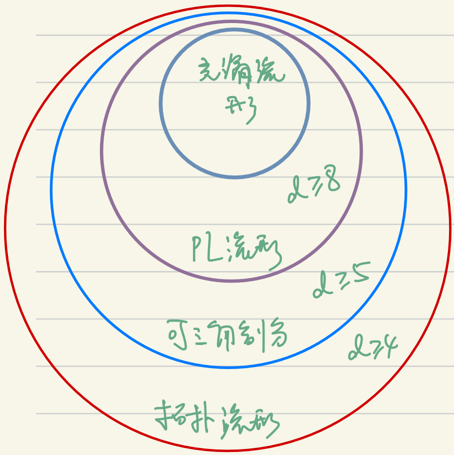


显然相同字母表示粘合, 下面这个是错误示范



阴影部分应当是两个不同的单纯形, 但是用同一字母标记, 到抽象单形中就会被认为是同一个, 粘合也不是 S^2, 所以两个单纯形(三角形)之间也就只能有一个公共边. 对于线段也是. 比如 S^1 不能剖分为 

.



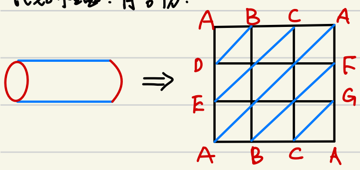
低维流形（$d\leq 3$）是相当特殊的！

(Radó) 任何紧致曲面都有二维有限单纯剖分　　P.S.: 但 $n\geq 4$ 就 $\exists$ 不可有限单纯剖分流形

(Moise) 任何紧致三维流形都有三维有限单纯剖分

也就是说，任何紧致曲面都可由有限个三角形的一些边配对粘合得到，而没有配上对的边以及它们的顶点构成曲面边界（粘合后）

比如柱面，有剖分：



AD、AF、··· 这些没有配对不会粘合在一起的线段在这个展开图粘合形成圆柱体后显然构成的柱面边界.

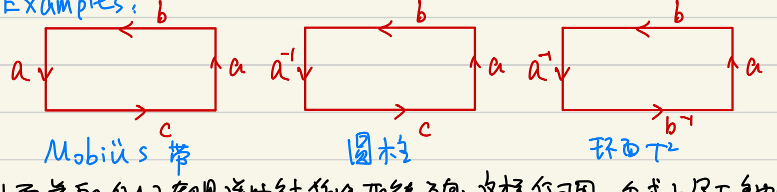
紧致曲面均有有限三角剖分，那么，研究曲面是否同胚只要看它们剖分粘合的方式是否相同.

更进一步，用三角形粘合成曲面时，我们可以选择先保证任意两个三角形只有至多一个公共边已粘合，而其它边即使要配对粘合也先不粘. 这样的话我们会得到一个多边形，把这个多边形再粘合起来便得到了曲面. 不难发现，曲面是否同胚取决于这个待粘合的多边形以及粘合方式是否相同. 照此思路继续。

曲面的多边形表示.

首先将多边形每条边都定义一个参考方向，要粘合的边用同一个字母 a_i 标记，a_i^{-1} 表示粘合方向与参考方向相反. 这样便构成了一个多边形表示. 我们后面考虑的是闭曲面 即 $\partial M=\emptyset$，故对应的多边形边数一定是 $2n$. 两两配对粘合.

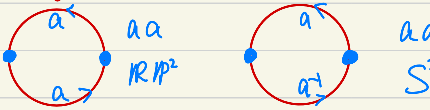
Examples:



上面举的例子都是逆时针依次取参考方向. 这样便可用一个式子写下多边形表示. 不用画出来. 比如上面三个的多边形表示就是 $abac$，$aba^{-1}c$，$aba^{-1}b^{-1}$

另外，没有二边形，但是为了表示 S^2 与 $\mathbb{R}P^2$

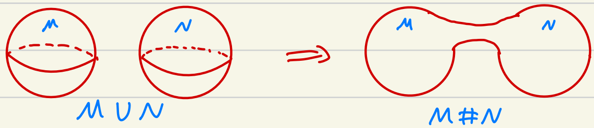
就要硬造一个，类似于这种 $\Longrightarrow$



两个流形硬生生摆在一起只是“和”. 要连通还要想办法在它们之间建立一个“通道”：

连通和.

几何直观:



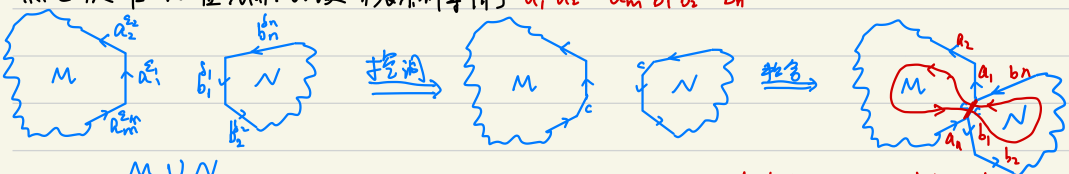
① M.N 各挖去一个洞(同胚于 D^2 的内部)

② M.N 沿洞的边缘粘在一起 ⇒ M#N.

从多边形表示上看. 挖洞相当于M的边界多出来一条没配对的边: 把多边形的某顶点炸开, 变成一条不与其它边粘合的边. 相当于在M上挖了洞

连通和就是把多边形表示直接拼起来:

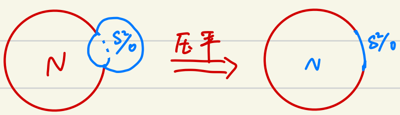
M.N 多边形表示分别为 $a_1^{\varepsilon_1}a_2^{\varepsilon_2}\cdots a_m^{\varepsilon_m}$, $b_1^{\delta_1}b_2^{\delta_2}\cdots b_n^{\delta_n}$, 多边形表示并不是唯一的. 因为炸开哪个顶点也不是唯一的. 但 M#N 的多边形表示都等价于 $a_1^{\varepsilon_1}a_2^{\varepsilon_2}\cdots a_m^{\varepsilon_m}b_1^{\delta_1}b_2^{\delta_2}\cdots b_n^{\delta_n}$



$M\#N = a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_n$

$S^2 \# N \cong N$

S^2 挖洞后同胚于圆盘. 故 $S^2 = aa^{-1}$ 与 N 连通和之后会把 N 挖掉的洞"补回来"

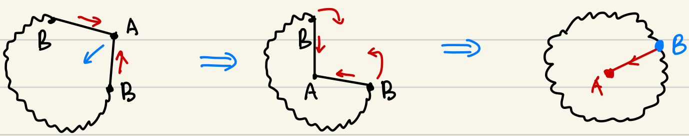


故 $\forall N$. $S^2\#N \cong N$.

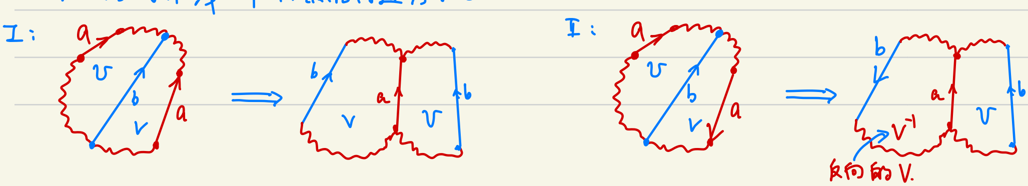
标准多边形表示.

用下面两类操作可以对任意曲面多边形表示进行标准化.(同胚操作)

化简: 将相邻两反向对边前粘合收到多边形内部.



手术: 沿对角线割开. 然后再进行粘合



通过一系列标准化操作，可化为标准多边形表示：

① 亏格为g的不可定向闭曲面：　　参考：不能取向，故 $aa\cdots \cong a^{-1}a^{-1}\cdots$

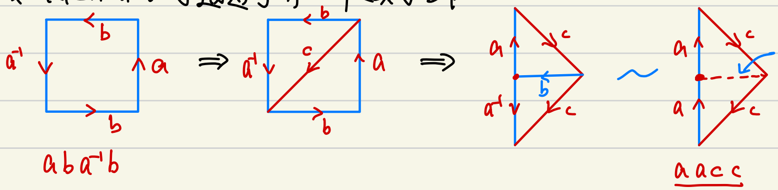
$$gP^2: a_1a_1a_2a_2\cdots a_ga_g$$

② 亏格为g的可定向闭曲面：

$$gT^2: a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1}\cdots a_{2g-1}a_{2g}a_{2g-1}^{-1}a_{2g}^{-1}$$ (不能有 $a_ia_i^{-1}$，不然由连通和 $S^2\#N\cong N$，与不加它等价)

有一个例外是球面 S^2，下面约定 $S^2=0T^2$（亏格为0的可定向闭曲面）

比如Klein瓶，可通过手术剪贴为 $2P^2$：



b粘合了，但顶点还要留住 是后面进一步粘合标记物

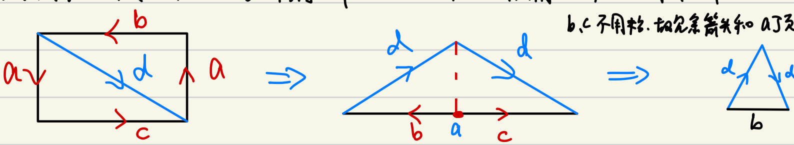
标准多边形表示符合后曲面的几何直观。

$1P^2$ 就是射影平面，而 $gP^2=(g-1)P^2\#RP^2 = RP^2\#\cdots\#RP^2$ (g个射影平面连通和)

由于 $S^2\#N\cong N$，所以 gP^2 几何上看就是在球面上挖g个洞，然后安装上g个交叉帽

所谓交叉帽就是 RP^2 上挖一个洞，即 aac．下面我们用"手术"说明交叉帽与Möbius带同胚．

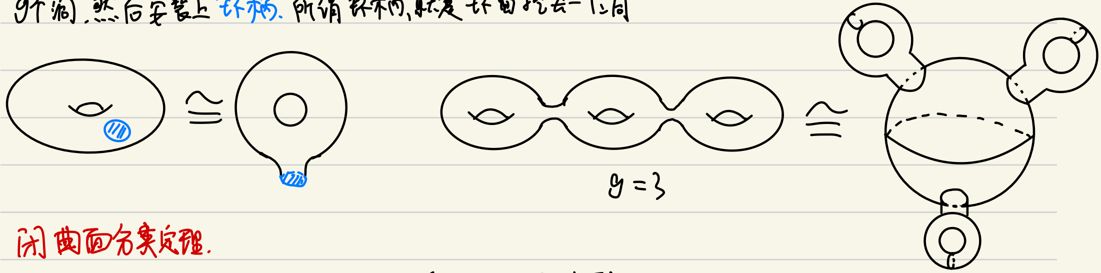
b、c不用粘，故无条箭头和a顶点可去除



即为交叉帽．

不过交叉帽无法嵌入 E^3，故这里画不出图形，但 gT^2 可以画出。

$1T^2$ 就是环面，且 $gT^2=(g-1)T^2\#T^2$ 有了上面的经验，我们立刻知道 gT^2 就是球面上挖g个洞，然后安装上环柄，所谓环柄就是环面挖去一个洞



闭曲面分类定理．

gT^2 以及 kP^2 不重复地列出了闭曲面的所有同胚类型

直观上讲，知道曲面有几个"洞"以及是否可定向，便知其同胚类型．

闭曲面是不带边的流形，而带边曲面从多边形表示上看区别是有些边不用粘合。从流形角度上看表现为闭曲面挖去圆盘内部留下边界。挖去n个圆盘，边界的连通分支数就是n。有下面紧致带边曲面分类定理：

挖去m个圆盘内部的 gT^2 和挖去n个圆盘内部的 kP^2 不重复地列出所有的紧致带边曲面

Euler 示性数

设 K 是一个 n 维有限复形，并且对于每个维数 i，K 中所含 i 维单形的个数为 m_i，则称：

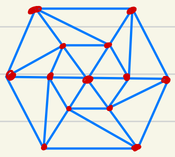
$$\boxed{\chi(K)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i m_i}$$

为 Euler 示性数。是一个拓扑不变量。

Euler 公式

考虑一个紧致的闭曲面，从其多边形表示上看。其由 F 个多边形(面)的边配对粘合得到。设这些多边形有 2E 条边，最终粘合得到 E 条边，且最后所有顶点要粘成 V 个顶点。则这个(闭曲面)的 Euler 数为 $\chi=V-E+F$.

Proof: 要证这一公式，首先要把多边形这些都完全剖分为三角形再去数单形个数，以 f=1 为例。图示以 e=3 为例。



0维 $4e+1$ 但2e个顶点会粘合为v个 $\Rightarrow 4e+1-2e+v$

1维 $2e\times3+2e\times2=10e$ 但2e条边会粘合成e个 $\Rightarrow 10e-2e+e=9e$

2维 $2e\times3=6e$

故 $\chi=2e+1+v-9e+6e=1-e+v$

$f\neq1$ 类似讨论即可 □

注意对于一个闭曲面，我们可以取多种不同的多边形表示，它们是同胚的，标准多边形表示有个特殊的地方：多边形上所有顶点最终会粘到同一点。利用这一事实我们就可以算出所有闭曲面的 Euler 数： $\chi(g\mathbb{P}^2)=2-2g$， $\chi(kT^2)=2-k$.

对于紧致带边曲面也可类似讨论，只不过是有些边不配对粘合。用 m、n 表示边界连通分支数。

没配对的多边形边数

则： $\chi(g\mathbb{P}^2_m)=2-2g-m$， $\chi(kT^2_n)=2-k-n$

这几个公式非常重要，我们可以避免繁琐的手续化简多边形表示。直接用 V-E+F 通过多边形表示计算 Euler 示性数，若是提前知道曲面是否可定向，就可直接计算出亏格了。直接确定曲面分类。

另外对于闭曲面M.N.还有公式: $\chi(M\#N)=\chi(M)+\chi(N)-2$

Proof. 显然 $M\#N$ 要有 f_1+f_2 个多边形粘起来. 边数为 $2(e_1+e_2)+2$. ($+2$是因为连通和时 M.N 各要挖开一个顶点.) 最终粘合得到 e_1+e_2+1 条边, 顶点"挖开"了两个, 它们会最终粘成一个顶点, 故总顶点 $V=V_1+V_2-1$
$E=E_1+E_2+1$, $F=F_1+F_2$. $\Rightarrow \chi(M\#N)=\chi(M)+\chi(N)-2$, 也可从连通和的几何直观上来验证这一公式 □

曲面的可定向性.

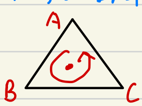
你能在 E^3 中看到的闭曲面都是可定向的, 因为不可定向闭曲面无法嵌入 E^3

不过只对闭曲面成立. 比如 Möbius 带能嵌入 E^3.

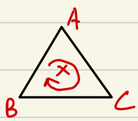
单形的定向

设σ是一个n维抽象单形. 在σ的顶点的不同排列上定义等价关系: $P_A\sim P_B$ iff P_A, P_B 之间只差一个偶置换. 不难得知 $n>0$ 时有且仅有两个类. 我们把这两个类称为定向且相反. 记为 $[P_0,P_1,\cdots P_n]$ 和 $-[P_0,P_1,\cdots,P_n]$.

e.g. 三角形(二维单形)定向



$[ABC]$



$[ACB]=-[ABC]$

几何直观上就是右手螺旋定则怎么旋看四周. 另外. 右手、左手坐标系其实也是定向的选择.

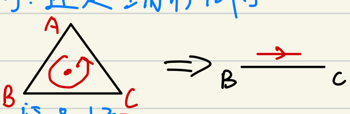
诱导定向.

设 $\vec{\eta}=[P_0\cdots P_n]$ 是n维单形△的一个定向, σ是△的一个 $n-1$ 维面. 且 P_i 不是它顶点. 则称:

$$(-1)^i[P_0\cdots P_{i-1}P_{i+1}\cdots P_n]$$

为σ相对 $\vec{\eta}$ 的诱导定向. (把 P_i 去掉并加上 $(-1)^i$)

e.g. 还是三角形例子



$[ABC]$ $\quad (-1)^0[BC]=[BC]$

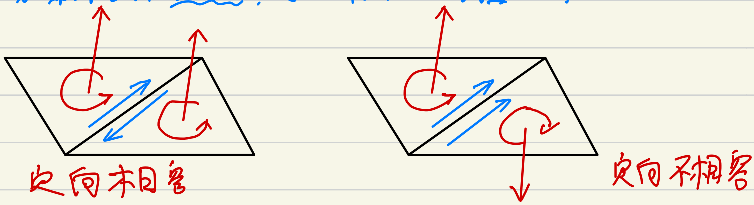
从几何上直观地看就是按照原定向来单独看在某个面上进行方向

对于两个定向n维单形 $(\Delta_1,\vec{\eta}_1)$ & $(\Delta_2,\vec{\eta}_2)$, 若满足以下两个条件之一 便称两个定向 $\vec{\eta}_1$ and $\vec{\eta}_2$ 相容

1° $\Delta_1\cap\Delta_2=\phi$

2° $\Delta_1\cap\Delta_2=\sigma$ (有公共 $n-1$ 维面) 且 $\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2$ 在 σ 上诱导定向相反

要特别注意最后这个相反，可以用下面两图说明：



☆ 如果一个 n 维有限单纯复形 K 的每个 n 维单形 Δ_i 上可以取一个定向 $\vec{\eta}_i$ 使得任意两个定向之间都相容，则称 K 是可定向的.

- 可定向性是拓扑不变性质.
- 一个闭曲面 M 不可定向 iff 其多边形表示中有 $\cdots a\cdots a\cdots$ 同向粘合

再结合上一节的讨论，我们发现对闭曲面的分类只需要多边形表示就够了，不必用“手术”化为标准多边形表示再去判断。由多边形表示看有无同向对可直接确定是否可定向，再有 $V-E+F$ 计算出 Euler 数，再由 $\chi(gT^2)=2-2g$ 或 $\chi(kP^2)=2-k$ 确定亏格便可分类闭曲面.

例如有下列公式成立：

$$gT^2\#hT^2=(g+h)T^2 \qquad kP^2\#lP^2=(k+l)P^2 \qquad gT^2\#kP^2=(2g+k)P^2$$

证明以上公式主要是分析连通和运算对可定向性影响，从多边形表示下连通和定义出发不难知道连通和不改变同向粘合对情况，故 iff $T\#T\sim T$. □

同调和Betti数

引子：$\triangle ABC$ 上可取定向 $[ABC]$，其在每条边上有个诱导定向，且这三条有向边合在一起恰好环绕 $\triangle ABC$ 一周，形式上可用 $\partial[ABC]=[AB]+[BC]+[CA]=[BC]-[AC]+[AB]$

$\triangle ABC$ 与 $\triangle CBD$ 取相容定向 则 $\partial[ABC]+\partial[CBD]=[AB]+[BD]+[DC]+[CA]$

正好环绕一周. 那么，从一般的复形出发，可以发展出同调理论

实系数同调.

链：如果有限单纯复形 K 共含 m 个 n 维单形 $\Delta_1,\cdots,\Delta_m$，在每个 Δ_i 上取定向 $\vec{\eta}_i$，则每个形式表达式：

$$a_1\vec{\eta}_1+a_2\vec{\eta}_2+\cdots+a_m\vec{\eta}_m,\ (a_1,a_2,\cdots a_m\in\mathbb{R})$$

称为一个链. n 称为其维数. 实际上所有 n 维链构成一个线性空间，我们记为 $C_n(K)$

另外，K如果不含任何n维单形，则 $C_n(K)\equiv\{0\}$ 即零空间

边缘算子: 定义线性映射:

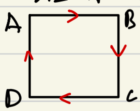
$$\partial_n: C_n(K)\longrightarrow C_{n-1}(K),\quad [p_0 p_1\cdots p_n]\longmapsto\sum_{i=0}^{n}(-1)^i[p_0p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}p_n]$$

也就是写成n-1维面上的诱导定向的和，由于诱导定向计算与如何排列顶点无关，所以这里也是.

闭链: $Z_n(K)\equiv \mathrm{Ker}\,\partial_n=\{\sigma\in C_n(K)\mid \partial_n\sigma=0\}$

边缘链: $B_n(K)\equiv \mathrm{Im}\,\partial_{n+1}=\{\partial_{n+1}\sigma\mid \sigma\in C_{n+1}(K)\}$

一维闭链就是一些定向闭折线的形式组合,比如:



$\partial_1([AB]+[BC]+[CD]+[DA])$ 不过这里显然要求前面系数不能乱

$=[B]-[A]+[C]-[B]+[D]-[C]+[A]-[D]=0$ 取，这里都定为1.

边缘链一定是闭链: $\boxed{\partial_n\circ\partial_{n+1}\equiv 0}$

Proof: 只用对 $C_{n+1}(K)$ 中基矢 $[p_0p_1\cdots p_{n+1}]$ 证明即可.

$$\partial_n(\partial_{n+1}[p_0\cdots p_{n+1}])=\partial_n\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i[p_0\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_{n+1}]=\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\partial_n[p_0\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_{n+1}]$$

$$=\sum_{0\le j<i\le n+1}(-1)^{i+j}[p_0p_1\cdots p_{j-1}p_{j+1}\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_{n+1}]+\sum_{0\le i<j\le n+1}(-1)^{i+j-1}[p_0p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_{j-1}p_{j+1}\cdots p_n]$$

$$=0$$

$\forall\sigma\in B_n(K)\longrightarrow\exists\Delta\in C_{n+1}(K)$, s.t. $\partial_{n+1}\Delta=\sigma$ 而 $\partial_n\sigma=(\partial_n\circ\partial_{n+1})\Delta=0$

故 $B_n(K)\subseteq Z_n(K)$

下面回顾一下线性代数中关于商空间的定义，对于 $U\subset V$. 可定义仿射子集

$v+U\equiv\{v+u\mid\forall u\in U\}$. 在加法运算 $(v+U)+(w+U)\equiv(v+w)+U$ 定义和数乘 $t(v+U)\equiv tv+U$

定义下，所有仿射子集构成一个线性空间.我们称之为商空间.记为 V/U

同调: $H_n(K)\equiv Z_n(K)/B_n(K)$. $H_n(K)$ 中的每个元素称为一个同调类 $[\sigma]$. 若 $Z_n(K)$ 中元素 $\sigma_1,\sigma_2\in[\sigma]$，则称 σ_1,σ_2 之间同调，记为 $\sigma_1\sim\sigma_2$. 用线性代数语言表述出来即为: $\sigma_1,\sigma_2\in Z_n(K)$, $\sigma_1\sim\sigma_2$ iff $\sigma_1-\sigma_2\in B_n(K)$

而 $b_n\equiv\dim H_n(K)=\dim Z_n(K)-\dim B_n(K)$ 称为K的n维贝蒂数 Betti 数.

前面讨论中 $a_i\in\mathbb{R}$. 若 $a_i\in\mathbb{Z}$，则 $C_n(K,\mathbb{Z})$ 构成一个交换群. $B_n(K,\mathbb{Z})$ 是其正规子群.这时

$H_n(K;\mathbb{Z})\equiv C_n(K;\mathbb{Z})/B_n(K;\mathbb{Z})$ 称为K的n维整系数同调群.

可以证明: $\dim H_n(K;\mathbb{R})=\mathrm{rank}\,H_n(K;\mathbb{Z})$ 群G的秩 rank G 定义为其最小生成集合的元素数

同调群是拓扑不变量 $\Rightarrow$ Betti数是拓扑不变量.

这是同调论的重要结论，即Euler数和可定向性的拓扑不变性是其简单推论.

欧拉示性数可用Betti数表示： $\chi(K)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i b_i(K) \longrightarrow \chi(K)$ 拓扑不变.

Proof：对于 $V\to W$ 的线性映射 T. 有线性映射基本定理： $\dim V=\dim\ker T+\underbrace{\dim \mathrm{Im}\, T}_{\text{也叫T的秩. 即} \operatorname{rank} T}$.

故 $\dim Z_n(K)+\dim B_{n-1}(K)=\dim C_n(K)$

$\Rightarrow b_i(K)=\dim Z_i(K)-\dim B_i(K)=\dim C_i(K)-\dim B_i(K)-\dim B_{i-1}(K)$

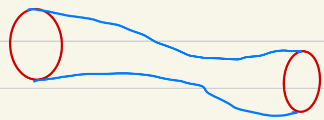
$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n}(-1)^i b_i(K)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\dim C_i(K)-\dim B_{-1}(K)+(-1)^n\dim B_n(K)$

而 $B_{-1}(K)=B_n(K)=\{0\}$ 故 $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i b_i(K)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\dim C_i(K)=\chi(K)$ $\square$

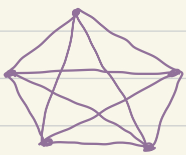
另外还可以证明，闭曲面可定向，则 $b_2=1$，否则 $b_2=0$. 所以我们最终得到，闭曲面拓扑类型完全由其Betti数决定.

同调是道路连通性的高维推广

几何直观上看 $[A]$ 与 $[B]$ 同调 可以 $[A]-[B]=\partial[BA]\in B_1(K)$. 即A,B由一条边相连. 一般地说. $[A]$ 与 $[B]$ 同调 iff K中有一段折线可以连接A、B，即通常道路连通性的几何直观. 而同伦适用于更高维的情形. 二维平面之间的同调可视为是K中有一根"管子"把它们连起来：



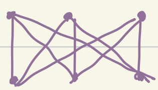
可以用 $\chi(S^2)=2$ 证明. K_5, $K_{3,3}$ 不是平面图，即无法嵌入 S^2.



K_5

证明思路是 嵌入给出一个 S^2 的单纯剖分. 但证明关键是一个"显然"的定理 约当闭曲线定理 (JCT)

- S^2 上闭曲线（不自交）把 S^2 分为两个部分
- 每个部分同胚于 D_2



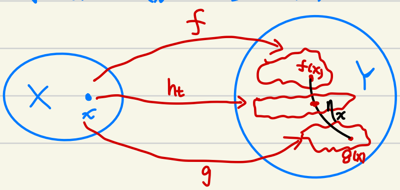
$K_{3,3}$

进一步还可证明 JCT 与 $K_{3,3}$ 不是平面图等价.

基本群及其应用

同调是道路连通性的高维推广,而同伦也是在考虑道路连通性,只不过考虑的并不直接就是拓扑空间上的道路连通,而是连续映射构成空间上的连通性.

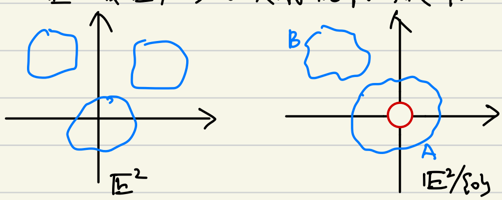
设 X,Y 是两个拓扑空间. 记 $C(X,Y)=\{f:X\to Y\ (f\text{连续})\}$,也就是所有连续映射构成的集合. 若对于 $f,g\in C(X,Y)$, $\exists$连续映射 $H:X\times[0,1]\to Y$ 满足 $H(x,0)=f(x)$, $H(x,1)=g(x)$ 对 $\forall x\in X$ 成立. 则称 f 和 g **同伦**, H 为从 f 到 g 的**伦移**. 称每个映射 $h_t:X\to Y$, $x\mapsto H(x,t)$ 为 H 在 t 时刻的**切片**, 称每条道路 $\gamma_x:[0,1]\to Y$, $t\mapsto H(x,t)$ 为 H 在 x 点的**路**



从定义上便不难看出 同伦意味着两个连续映射能通过一条抽象的"道路" $H(x,t)$ 连续地变成彼此

$\mathbb{E}^2$ 与 $\mathbb{E}^2/\{0\}$ 不同胚,我们可以考虑 S^1 到它们上的连续映射之间的同伦来说明这一点..

$S^1\to\mathbb{E}^2$ 或 $\mathbb{E}^2/\{0\}$ 的映射的像集是平面上的闭道路



$\mathbb{E}^2$ 中所有闭道路都可以连续变到彼此 故不难想到 $\forall f,g\in C(S^1,\mathbb{E}^2)$,总可以找到它们之间的伦移 但 $\mathbb{E}^2/\{0\}$ 中 由于A中有"洞" 显然其无法连续变到B. $A\not\simeq B$

上面的几何直观中其实已经引入了映射类的概念, $C(S^1,\mathbb{E}^2)$ 中所有元素同伦, 可类比于道路连通空间 而 $C(S^1,\mathbb{E}^2/\{0\})$ 显然并不连通. 但可以划分为不少道路连通子集的并. 上面 A.B便可类比于"处于不同的道路连通分支".

映射类: $C(X,Y)$ 上的同伦关系显然是一个等价关系,利用这个等价关系可以对 $C(X,Y)$ 中映射进行划分. 每个等价类称为映射类 $\langle f\rangle$,所有映射类构成的集合 ($C(X,Y)$ 之商集) 记为 $[X,Y]$. 如果 f 同伦于常值映射. 则称 f **零伦**.

定理1: 若 $g\simeq g':X\to Y$, $f\simeq f':Y\to Z$, 则 $f\circ g\simeq f'\circ g':X\to Z$ □

定理2 (诱导商空间伦移): 设 $p:X\to X'$, $q:Y\to Y'$ 是商映射. 伦移 $H:X\times[0,1]\to Y$ 与商映射相容 即 $\forall x_1,x_2\in X$, $t\in[0,1]$, $p(x_1)=p(x_2)\to q(H(x_1,t))=q(H(x_2,t))$ 其实就是在说 x_1,x_2 被粘合到同一点..,那么 $H(x_1,t)$, $H(x_2,t)$ 也要被粘合到同一点... 则存在伦移 $H':X'\times[0,1]\to Y'$, s.t. $q(H(x,t))=H'(p(x),t)$.

上面定理叙述比较复杂. 我们改用交换图表进行描述

$$\begin{tikzcd} X\times[0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[d, "p\times id"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ X'\times[0,1] \arrow[r, dashed, "H'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

交换图的顶点是一系列集合.中间的箭头表示一系列映射,每一条节点到节点的路线表示一系列映射的复合.而"交换"含义是只要起末节点相同,不管是啥路线,对应的复合映射就"相等".比如上面这张图就在说:$H'\circ(p\times id)=q\circ H$. 另外,我们把$H'$画出虚线,表示存在且唯一的一个映射,毕竟图表交换是有条件的. H'应依赖于H,q,p选择而变化.而其它是实线,表示任意映射.

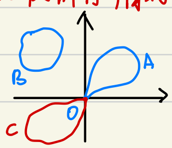
Proof:定理证明关键在于构造出H'. 定义 $(x',t)\in X'\times[0,1]$ 取$x\in X$ s.t. $p(x)=x'$,然后令$H'(x',t)=q(H(x,t))$, H'便是我们构造出的映射.下面证明其连续,便可知其为伦移.由于p为商映射,故$p\times id$也是商映射.由前面商映射部分提到的一个定理有:H'连续 iff $H'\circ(p\times id)$连续.而由H'构造可知 $H'\circ(p\times id)=q\circ H$连续. □

另外,很多时候也常用此定理相对弱化的版本.即$q=id_Y$且取$Y=X$.遇到时要注意一下.

相对同伦:设$A\subseteq X$, $f,g\in C(X,Y)$ 如果存在伦移$H: f\simeq g$ 满足$\forall a\in A$, $H(a,t)=f(a)=g(a)$ 则称f,g相对于A同伦,记为$H: f\simeq g \text{ rel } A$,并称$H$为一个相对于A的伦移.

这一定义只在$\mathrm{Im}f\cap \mathrm{Im}g\neq\emptyset$时有意义.即同伦额外要求一些像点永远不动(但再次强调,同伦概念是对映射本身的而不是映射的像集).前面的定理也都有相对同伦的版本.

还是以前面的"绳圈"为例说明,这里A、B、C均指代的是映射!



A,C 相对O点同伦

A,B同伦但不相对同伦

定理: $f,f'\in C(X,Y)$ 且 $f\simeq f' \text{ rel } A$, $g,g'\in C(Y,Z)$ 且 $g\simeq g' \text{ rel } B$. 且 $f(A)\subseteq B$.
则 $g\circ f\simeq g'\circ f' \text{ rel } A \in C(X,Z)$ □

同伦等价

设 X 与 Y 为拓扑空间，如果存在映射 $f: X\to Y$ 和 $g: Y\to X$ 使得：

$$g\circ f \simeq id_X \quad 且 \quad f\circ g \simeq id_Y$$

则称 X 和 Y 同伦等价 记为 $X\simeq Y$，我们也称映射 f, g 同伦等价，并互为同伦逆。

上面定义其实是对同胚定义的放宽，$g\circ f = id_X$，$f\circ g = id_Y$ 中等号换成同伦便得到了同伦等价的定义，显然 同胚一定同伦等价. 且同胚中 f, g 确定了一个另一个完全可确定. 但同伦逆并不唯一.

设 $\exists f,g$ s.t. $X\simeq Y$. 若映射 $h\simeq g$ 则 $f\simeq f \to f\circ h \simeq f\circ g \simeq id_X$ 同理 $h\circ f \simeq id_X$. 从这便可看出同伦逆不唯一. 另一方面. $f\circ h \simeq id_Y$ 则 $g \simeq g\circ f\circ h \simeq id_Y\circ h \simeq h$. □

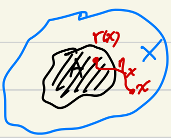
但是这一定义颇抽象，利于理论分析 但不利于几何直观想象. 所谓"空间连续变形"的说法其实对应着一种特殊的同伦等价：形变收缩

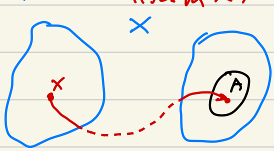
- 设 $A\subseteq X$，$i: A\hookrightarrow X$ 是包含映射，如果 $r: X\to A$ 满足 $r\circ i = r|_A = id_A$，则称之为收缩映射，称 A 为 X 的收缩核

  也就是说，r 将一个大空间 X 中的点全部映射到较小空间 A 中. 但原先就在 A 中的点不動.

- 如果 r 还满足 $i\circ r \simeq id_X$. 则称 r 为形变收缩. A 为 X 的形变收缩核.

  设 $i\circ r \overset{H}{\simeq} id_X$ 则 $H(x,t) = \gamma_x(t)$ 是从 $x \to r(x)$ X 中的道路，注意 前面我们对收缩映射是没有其它要求的，什么连续性都没有. 其包含哪些比较病态的，对点的移动并不连续的映射. 现在我们规定 形变收缩必须让 X 中的点沿着 X 中的道路移到 A 中去





比如右图中 A 位于 X 中一个道路连通分支中 而 X 本身并不道路连通的情况下，不可能将 $x\in X$ 通过形变收缩移到 A 中.

- 如果 r 还满足 $i\circ r \simeq id_X$ rel A，则称之为强形变收缩 A 为 X 的强形变收缩核.

形变收缩带来的同伦是将 r, i 看作同伦逆，那么需要为它们找到一个同伦 $H(x,t)$. 从前面讨论不难发现，我们只用找到 X 中每一点变化到 A 的路径 即可. 且 A 中的点 要回到原位. 注意，我们并未强调 A 中的点在这一"形变"的过程中不能动. 实际上 A 中的点完全可以形变时先跑到别处去.

只要在$t=1$时回来就好. 如果$\exists H(x,t)$, 能够让 $t\in[0,1]$内 A中点都保不动 那更好. 即强形变收缩.

A是X形变收缩核 即$\exists F(x,t): X\times I \to X$

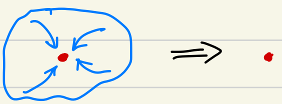
1° $F(x,0)=x$. 即$F(x,0)=id_X$

2° $\mathrm{Im}F(x,1)\subseteq A$

3° $F(x,1)|_A = id_A$ $\xrightarrow{F(x,t)|_A = id_A}$ 强形变收缩

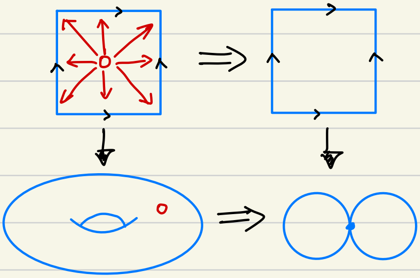
Examples.

① E^n中凸子集 → 其中任一点.



取线性伦移即可

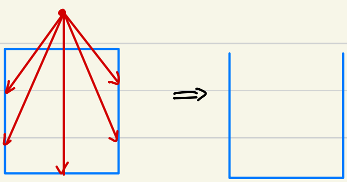
② 去掉中心的正方形 → 边界.



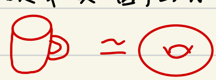
可以做到收缩时保持边界不动, 所以是个强形变收缩.

另外这种收缩与正方形→T^2的粘合规则是一致的 故我们可以看成 $T^2/\{o\} \to S^1\vee S^1$ 的强形变收缩

③ 实心圆柱 $D^n\times[0,1]$ → 空心去顶圆柱



有趣的是, 科普书中常说的 茶杯≃甜甜圈 正好倒过来, 将空心去顶圆柱"吹成"实心圆柱, 再与茶杯柄合成一个甜甜圈.



• 如果一个空间可以形变收缩到一点, 则称其可缩, 显然, 可缩空间一定道路连通. (反过来不成立)

定理: 设X与单点集$\{p\}$同伦等价 (不一定由形变收缩构造) 则 $\forall q\in X$ 均是其形变收缩核.

Proof: 由于 $X\simeq\{p\}$ 则$\exists f,g$ s.t. $f\circ g\simeq id_{\{p\}}$, $g\circ f\simeq id_X$, 注意 $g\circ f$ 是 $X\to X$ 的常值映射, 因为 $X\xrightarrow{f}\{p\}$ 而 $\{p\}\xrightarrow{g}X$ 只能有一种选择. 现在取 $r: X\to\{q\}$, $x\mapsto q$ 设 $i:\{q\}\hookrightarrow X$ 为包含映射. 则显然 $r\circ i = id_{\{q\}}$ 是收缩映射. 又因X可缩, 故X道路连通. 故任意两个常值映射同伦, 这意味着 $i\circ r\simeq g\circ f\simeq id_X$. 故 r为形变收缩. 而 q是任取的. 故 $\forall q\in X$ 均为形变收缩核.

• 证明同伦等价常用手段.

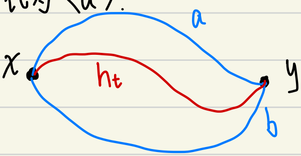
构造一系列空间 $Z_1,\cdots Z_n$，其中 $Z_1=X$，$Z_n=Y$. 且 Z_i 要么同胚于 Z_{i+1} 形变收缩核. 要么反过来 Z_{i+1} 同胚于 Z_i 的形变收缩核. 再由同伦等价的传递性便可证明 X,Y 同伦等价.

基本群

定端同伦: a,b 都是从 x 到 y 的 X 中的道路，$H:[0,1]\times[0,1]\to X$ 是从 a 到 b 的伦移. 且满足每时刻切点 $h_t(s):[0,1]\to X$，$s\mapsto H(s,t)$ 也是从 x 到 y 的道路，即:

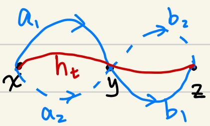
$$h_0=a,\quad h_1=b,\quad h_t(0)=x,\quad h_t(1)=y$$

则称 a 和 b 定端同伦(道路同伦)，所有与 a 定端同伦的道路构成的集合称为 a 的道路类，记为 $\langle a\rangle$.



定端伦移的直观就是伦移时保持初末端点不动.

道路类的乘积: $a_1\simeq a_2$，$b_1\simeq b_2$ 且 a 与 b 起末点重合，则 $a_1b_1\simeq a_2b_2$，也就说道路类的乘积可定义为 $\langle a\rangle\circ\langle b\rangle\equiv\langle ab\rangle$



$$\left.\begin{array}{l} a_1\overset{F}{\simeq}a_2 \\ b_1\overset{G}{\simeq}b_2 \end{array}\right\}\Rightarrow a_1b_1\overset{H}{\simeq}a_2b_2 \qquad H(s,t)\equiv\begin{cases} F(2s,t), & 0\le s\le\frac{1}{2} \\ G(2s-1,t), & \frac{1}{2}<s\le 1 \end{cases}$$

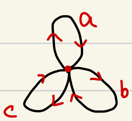
从切片角度看 $h_t=f_tg_t$. 且 H 不仅定端 x,z，其时伦移时 y 也不动

基本群: 起末终点均为 x_0 的道路称为以 x_0 为基点的闭道路，其定端同伦类称为闭道路类，X 上所有以 x_0 为基点的闭道路类构成的集合称为 $\pi_1(X,x_0)$ 在上面定义的道路类乘法下构成一个群. 即基本群

闭道路其实是一个 $S^1\to X$ 的映射，上面起点、终点、原则上讲可以任意指定. 这里定义时指定的基点，实际上是在指定伦移时的不动点.

Proof: 并不做明显的证明，主要是感性理解一下.

① 结合律. 即要求 $(ab)c\simeq a(bc)$



recall: ab 的意思是沿着 ab 走完全程. 且各花 $\frac{1}{2}$ 的时间.

所以 $(ab)c$ 与 $a(bc)$ 的意思都是沿着 $a\to b\to c$ 走，只是时间不同分配

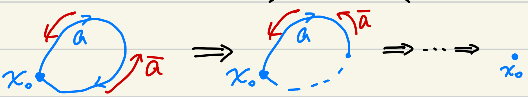
所以 $(ab)c$ 与 $a(bc)$ 之间的伦移就在于是连续地控制三条道路上的时间分配，道路本身不发生形变、

② 单位元：$e_{x_0}:[0,1]\to X$ ，$t\mapsto x_0$

单位元定义直观上看就是在 x_0 上停留时间 1，啥也不做. 那么 $e_{x_0}\cdot a\simeq a$ 之间的伦移只要连续地控制在 x_0 上停留时长即可. 同样 a 本身不发生形变.

③ 逆元：$\bar{a}(t)=a(1-t)$ 为 a 的逆道路，则 $\langle\bar{a}\rangle=\langle a\rangle^{-1}$.

$a\bar{a}\simeq\bar{a}a\simeq e_{x_0}$，$a\bar{a}$ 定义上是走一遍后再逆着走回去，如果慢慢地，a 还没走到终点



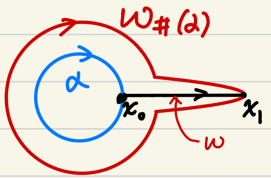
就开始往回走，这种"偷懒"行为越来越厉害时就可以慢慢变成完全不走的 e_{x_0} 了，即 $a\bar{a}$ 与 e_{x_0} 之间的定端同伦构建. □

高维同伦群：如果连续映射 $a:[0,1]^n\to X$ 满足 $\forall t\in\partial([0,1]^n)$，$a(t)=x_0\in X$，则称 a 为一个以 x_0 为基点的 n 维闭道路，简单点说就是 $S^n\to X$ 的连续映射. 如果 $a\overset{H}{\simeq}b$. 且 H 的每一个切片 h_t 也都是以 x_0 为基点的 n 维闭道路，则称 a,b 定端同伦. 所以定端同伦的 n 维闭道路类的集合记为 $\pi_n(X,x_0)$

在 $\langle a\rangle\langle b\rangle=\langle ab\rangle$ 的乘法定义下构成一个群，称为 n 维同伦群，其中 $c=ab$ 在高维情形定义为:

$$c(t_1,\cdots,t_n)=\begin{cases}a(2t_1,t_2,\cdots,t_n), & 0\le t_2<\frac{1}{2}\\ b(2t_1-1,t_2,\cdots,t_n), & \frac{1}{2}\le t_1\le 1\end{cases}$$

同一道路分支内不同基点定义的基本群相互同构:



设 ω 是 $x_0\to x_1$ 的道路类，定义从基点 x_0 到基点 x_1 的推送同构

$$\omega_\#:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_1)\ ,\ \alpha\mapsto\omega^{-1}\alpha\omega.$$

如图，α 是 x_0 为基点的闭道路，ω 是 x_0 到 x_1 的道路，而每一个 α 都可用图中方式对应到以 x_1 为基点的一个闭道路类，反之亦然

Proof：$\omega_\#(\alpha)\omega_\#(\beta)=(\omega^{-1}\alpha\omega)\cdot(\omega^{-1}\beta\omega)=\omega^{-1}\alpha\cdot\beta\omega=\omega_\#(\alpha\beta)$，所以 $\omega_\#$ 是个同态. 易于验证说明 $\omega_\#$ 是个双射，所以 $\omega_\#$ 是个同构 □

但不同道路分支内选取基点构成的基本群没有关联，且 $\omega_\#$ 与 $x_0\to x_1$ 的道路类选取有关*

☆ S^n 的基本群:

圆周的基本群 $\pi_1(S^1,x_0)$ 同构于无限循环群 $\mathbb{Z}$，而当 $n>1$ 时，n 维球面的基本群是平凡群.

Proof：这里只证 S^1 情形. $\mathbb{Z}$ 的定义是整数的集合在加法为乘法的定义下构成的 Abel 群.

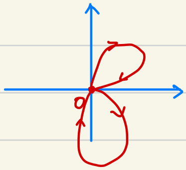
直观上看，S^1 的道路同伦类由绕 S^1 n 圈 $(n\in\mathbb{Z})$ 的那些道路构成 即:

* 当推同构与 $x_0\to x_1$ 上道路类选取无关时，$\pi_1(X,x_0)$ 必为交换群. 另外还可考虑 $x_0\to x_0$ 的推送同构，事实上是在构造 $\pi_1(X,x_0)$ 的自同构. 同样与 x_0 的闭道路类 ω 选取有关

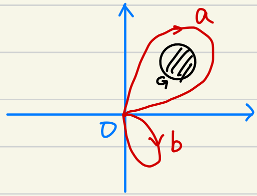
$a_{q,\theta}:[0,1]\to S^1$，$t\mapsto(\cos(2\pi qt+\theta),\sin(2\pi qt+\theta))$，且两条闭道路定端同伦 iff 它们圈数相等，即 q 相等.（不作证明） 故 $\pi_1(S^1,(\cos\theta,\sin\theta))=\{\langle a_n,\theta\rangle \mid n\in\mathbb{Z}\}$ □

单连通：对于道路连通的 X（则基本群与基点无关，只差个同构），若其基本群平凡则称其单连通

有些教材在谈及单连通时常粗略地说是那些"没有洞的空间"，直观上大体确实如此，我们以 $\mathbb{E}^2$ 为例.



显然任意一条闭曲线（道路）均可连续缩成 0 点，故 $\pi_1(\mathbb{E}^2,0)$ 为平凡群



显然挖个洞后，$b\in\langle e_0\rangle$ 但 $a\notin\langle e_0\rangle$，$a$ 在收缩回 O 时必然被洞阻挡. 故 $\mathbb{E}^2/\{q\}$ 不单连通.

Poincaré 猜想（现在是定理）：任何一个单连通的闭三维流形必定同胚于三维球面 S^3.

连续映射诱导基本群的同态.

如果两个拓扑空间 X, Y 之间可由连续映射 $f:X\to Y$ 相联系，它们的基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 与 $\pi_2(Y,f(x_0))$ 之间其实是同态关系. 可以用 f 构造出一个同态：

$$f_\pi:\pi_1(X,x_0)\to\pi_2(Y,f(x_0)),\quad \langle a\rangle\longmapsto\langle f\circ a\rangle$$

称为 f 的诱导同态*

Proof: $\langle a\rangle=\langle b\rangle$，即 a, b 同属于一个道路类时，H 为 a,b 的定端伦移，则显然 $f\circ H$ 为 $f\circ a\to f\circ b$ 的定端伦移 故 $\langle f\circ a\rangle=\langle f\circ b\rangle$. 这说明 f_π 是良定的。下面 $\forall\langle a\rangle,\langle b\rangle\in\pi_1(X,x_0)$，不必相等，有：

$f_\pi(\langle a\rangle\langle b\rangle)=f_\pi(\langle ab\rangle)=\langle f\circ(ab)\rangle$，由道路乘积定义.

$$f\circ(ab)=\begin{cases} f\circ a, & 0\le t\le\frac{1}{2}\\ f\circ b, & \frac{1}{2}< t\le 1\end{cases}=(f\circ a)(f\circ b)$$

故 $f_\pi(\langle a\rangle\langle b\rangle)=\langle f\circ a\rangle\langle f\circ b\rangle=f_\pi(a)\,f_\pi(b)$ 即同态性质 □

另外，这里 f_π 是依赖于基点 x_0 的选取的，严格来讲应记为 $(f_\pi)_{x_0}$，这里略去.

诱导同态的性质：

- $(id_X)_\pi = id_{\pi_1(X,x_0)}$
- $f: X\to Y$，$g: Y\to Z$ 均连续，则 $(g\circ f)_\pi = g_\pi\circ f_\pi$

* 物理上讲同态往往是自带满性的，而数学上没这要求，本 Note 使用数学上的惯例.

Proof: $\forall \langle a\rangle \in \pi_1(X,x_0)$, $(id_X)_\pi(\langle a\rangle) = \langle id_X\circ a\rangle = \langle a\rangle \Rightarrow (id_X)_\pi = id_{\pi_1(X,x_0)}$

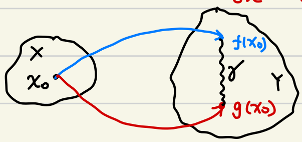
$\forall \langle a\rangle \in \pi_1(X,x_0)$, $(g\circ f)_\pi(\langle a\rangle) = \langle (g\circ f)\circ a\rangle = \langle g\circ(f\circ a)\rangle = g_\pi\langle f\circ a\rangle = g_\pi(f_\pi(a))$

故 $(g\circ f)_\pi = g_\pi\circ f_\pi$ □

• 相互同伦的映射之间诱导的基本群同态之间只差一个推送同构.

设 $f,g: X\to Y$ 同伦, $f\overset{H}{\simeq} g$, 定义道路 $\gamma: [0,1]\to Y$, $t\mapsto H(x_0,t)$. 即同伦时基点的移动, 则

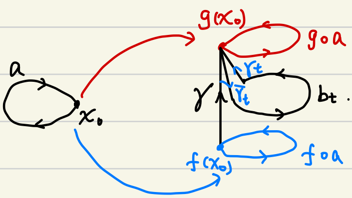
$$g_\pi = \langle\gamma\rangle_\#\circ f_\pi : \pi_1(X,x_0)\longrightarrow \pi_1(Y,g(x_0))$$



f_π 诱导 $\pi_1(X,x_0)$ 与 $\pi_1(Y,f(x_0))$ 之间同态.

g_π 诱导 $\pi_1(X,x_0)$ 与 $\pi_1(Y,g(x_0))$ 之间同态

$f\simeq g$. 则这两个群同态由基点所经过的道路相联系



Proof: 要证 $g_\pi = \langle\gamma\rangle_\pi\circ f_\pi$ 即证 任取以 x_0 为基点的闭道路 $g\circ a\simeq\gamma^{-1}(f\circ a)\gamma$. 注意这里我们使用"$\simeq$"而非"$=$". 因为 g_π, f_π 作用对象其实都是道路类.

$g\circ a$ 与 $f\circ a$ 是同伦的. 取伦移切片 $a_t = h_t\circ a$ 即可. 这样 $a_0 = h_0\circ a = f\circ a$ $a_1 = h_1\circ a = g\circ a$. 且 h_t, a 均连续 $\to a_t$ 连续. 同时可见 $f\circ a\to g\circ a$ 过程中基点肯定从 $f(x_0)$ 变到了 $g(x_0)$ 且沿着道路 γ 移动 故这一定不是个定端伦移. 设 $\gamma_t(s)\equiv\gamma((1-t)s+t)$ $\gamma_t(0)=\gamma(t)$, $\gamma_t(1)=\gamma(1)=g(x_0)$ 故 $\gamma_t(s)$ 是从 $\gamma(t)\to g(x_0)$ 的道路, 时间参数为 s 则可选取一个新的伦移. 时间切片为 $b_t = \overline{\gamma_t}\,a_t\,\gamma_t$, 这是从 $\overline{\gamma_0}(f\circ a)\gamma_0$ 到 $\overline{\gamma_1}(g\circ a)\gamma_1$ 的定端同伦 γ_0 正是 γ. γ_1 是点道路 $e_{g(x_0)}$ 故这正好说明 $g\circ a\overset{b_t}{\simeq}\gamma^{-1}(f\circ a)\gamma$. 且是所要求的定端同伦. □

这个定理也正好说明了 $\pi_1(Y,f(x_0))$ 与 $\pi_2(Y,g(x_0))$ 由道路 γ 诱导的推送同构相联系

• 基本群是同伦不变的

若 $X\simeq Y$ 同伦等价 则诱导同态 $f_\pi: \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,f(x_0))$ 是同构.

同胚的空间基本群同构这很容易想到, 而这个结论更强, 同伦等价也可导出基本群同构. 所以在计算一个复杂空间的基本群时. 常常将其用形变收缩变化到结构更简单的空间后再去求基本群.

Proof: 设 g 为 f 同伦逆, 即 $f\circ g\simeq id_Y$, $g\circ f\simeq id_X$. $\to (g\circ f)_\pi = g_\pi\circ f_\pi \simeq (id_X)_\pi = id_{\pi_1(X,x_0)}$

$g_\pi\circ f_\pi$ 与 $id_{\pi_1(X,x_0)}$ 之间只差个推送同构, 而 $id_{\pi_1(X,x_0)}$ 是同构 故 $g_\pi\circ f_\pi$ 也是同构.

$g_*\circ f_*$ 是满的 → g_* 满，$g_*\circ f_*$ 单 → f_* 单，同样对 $f\circ g\simeq id_Y$ 分析可知 f_*, g_* 均既单又满，故 f_*, g_* 均是同构. □

不过上面的定理叙述中是否依赖于 f 定义域值域基本群中基点选取的. 前面讲过，如果空间道路连通，则基本群结构与基点选取无关(只差一个同构)，那么有推论：如果 X, Y 同伦等价且道路连通，则 $\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(Y,y_0)$ 同构，x_0, y_0 是任取的.

- 可缩空间一定是单连通的.

因为 $X\simeq\{x_0\}$. 而 $\{x_0\}$ 基本群平凡

- A 为 X 形变收缩核，则包含映射 $i: A\hookrightarrow X$ 诱导的同态就是同构.

□

基本群将拓扑对象转化为代数对象进行研究的工作模式可以用下面一图表示：

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, dashed] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dd, dashed] & & Z \arrow[dd, dashed] \\
& \pi_1(Y,y_0) \arrow[dr, "g_*"] & \\
\pi_1(X,x_0) \arrow[ur, "f_*"] \arrow[rr, "g_*\circ f_*"] & & \pi_1(Z,z_0)
\end{tikzcd}$$

番外：范畴论初步.

Define：范畴包含对象和态射，且满足三个要求：

① 任意一个态射唯一确定一个定义域和一个值域，它们分别为对象 X 和 Y，记为 $f: X\to Y$

② 每一对态射 $f: X\to Y$，$g: Y\to Z$ 决定唯一复合映射 $g\circ f: X\to Z$，且有结合律：$h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$

③ 每个对象 X 决定唯一一个恒同态射 $id_X: X\to X$，有 $\forall f: X\to Y$，$f\circ id_X = f = id_Y\circ f$

注意范畴是一个高度抽象的理论框架，我们用范畴论讨论时完全不用指明对象和态射究竟是哪一类具体数学概念. 比如下面几套数学概念都可以看作是一个范畴的具象化.

①集合范畴：集合为对象，映射为态射 (态射不一定是映射！完全可能不满足映射要求！)

② 拓扑范畴：拓扑空间为对象，连续映射为态射

③ 线性范畴：线性空间为对象，线性变换为态射.

④ 群范畴：群为对象，群同态为态射

同构在范畴下的定义.

若态射 $f: X \to Y$ 与 $g: Y \to X$ 满足 $g\circ f = id_X$，$f\circ g = id_Y$，则称 g 为 f 的逆态射. 且称 f,g 为同构态射，X,Y 同构. $X \cong Y$

在范畴意义下看，同胚，同构是一样的概念.

• $f: X \to Y$ 逆态射若存在，则唯一. □

函子

C、D是两个范畴. 如果有一个对应关系F 把C中每个对象X 对应到 D中一个对象F(X). 把C的每个态射 $f: X \to Y$ 对应到D中态射 $F(f): F(X) \to F(Y)$ 且满足

$$F(id_X) = id_{F(X)}, \quad F(g\circ f) = F(g)\circ F(f)$$

则称F为一个协变函子.

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & Z
\end{tikzcd}
\quad \overset{\text{协变函子}}{\underset{F}{\Longrightarrow}} \quad
\begin{tikzcd}
 & F(Y) \arrow[dr, "F(g)"] & \\
F(X) \arrow[ur, "F(f)"] \arrow[rr, "F(g\circ f)"'] & & F(Z)
\end{tikzcd}$$

图表交换.

若 G 将 $f: X \to Y$ 对应到 $G(f): G(Y) \to G(X)$ 且满足：

$$G(id_X) = id_{G(X)}, \quad G(g\circ f) = G(f)\circ G(g)$$

则称G为反变函子

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & Z
\end{tikzcd}
\quad \overset{\text{协变函子}}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \quad
\begin{tikzcd}
 & G(Y) \arrow[dl, "G(f)"'] & \\
G(X) & & G(Z) \arrow[ul, "G(g)"'] \arrow[ll, "G(g\circ f)"]
\end{tikzcd}$$

图表交换

函子就是在保持范畴结构基础上把一个范畴中的问题转化到另一个范畴中进行研究的方法.

比如 拓扑范畴 $\xrightarrow{\text{基本群}}$ 群范畴 $\xrightarrow{\text{线性表示}}$ 线性范畴

• 在 C 中，$X \cong Y$，则在D中一定有 $D(X) \cong D(Y)$ □

比如证明 X,Y不同胚可以从基本群不同构入手. 另外，在考虑基本群时，我们实际上在考虑带基点的拓扑空间. 函子为 π_1，$(X,x_0) \longmapsto \pi_1(X,x_0)$. 那些态射是将基点映射到基点的连续映射. 即 $f: (X,x_0) \to (Y,y_0)$ 且 $y_0 = f(x_0)$

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r] \arrow[d] & \circ \arrow[d] \\ \circ \arrow[ur] \arrow[r] & \circ \end{tikzcd}$$

自由图范畴：节点为对象，箭头为态射，若图表交换，为交换图范畴

交换图表严格定义：一个从交换图范畴Γ到范畴C的函子称为一个C满足的Γ型交换图表.

所以交换图表严格上讲是函子.

交换图表上的锥和余锥：

范畴C满足Γ型交换图表F（函子）（Γ范畴）. 在C中取一对象Z，并取集一对应关系φ. φ把每个Γ上对象X对应到一个态射 $\phi_X: Z \to F(X)$，使得任取Γ的态射 $f: X \to Y$，$\phi_Y = F(f)\circ\phi_X$，则称 (C,ϕ) 为F上的一个锥.

若φ把每个Γ上对象X对应到态射 $\phi_X: F(X) \to Z$，使得任取Γ的态射 $f: X \to Y$，$\phi_X = \phi_Y \circ F(f)$. 则称 (C,ϕ) 为F上的一个余锥

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "d"] \arrow[d, "a"'] & W \arrow[d, "c"] \\ X \arrow[ur, "e"] \arrow[r, "b"'] & Y \end{tikzcd} \quad \xrightarrow[\text{交换图表}]{F} \quad \begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, "F(d)"] \arrow[d, "F(a)"'] & F(W) \arrow[d, "F(c)"] \\ F(X) \arrow[ur, "F(e)"] \arrow[r, "F(b)"'] & F(Y) \end{tikzcd}$$

Γ范畴　　　C范畴.

取 $F(X) = Z$，则可取 $\phi_W = F(e)$，$\phi_Y = F(b)$.
但不存在 $\phi_U: F(X) \to F(U)$. 因为态射 $F(a)$ 是从 $F(U) \to F(X)$ 的. 故 $F(X)$ 不可能构成F上的一个锥，但若a反向，那么 $(F(X),\phi)$ 还能构成一个锥.

为了简洁，我们用交换图表示锥时，只画出三个节点情况：

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\phi_X"'] \arrow[dr, "\phi_Y"] & \\ F(X) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(Y) \end{tikzcd}$$

锥

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "\phi_X"'] & & F(Y) \arrow[dl, "\phi_Y"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

余锥

直观上理解就是在交换图表里找出一个锥形结构单独拎出来.

极限和余极限

如果F上的锥 (Z,ϕ) 满足任取锥 (H,ψ) 存在唯一态射 $h: H \to Z$, s.t. 每个 $\psi_X = \phi_X \circ h$，则称 (Z,ϕ) 为F的极限.

如果F上的余锥 (Z,ϕ) 满足任取余锥 (H,ψ)，存在唯一态射 $h: Z \to H$，使得每个 $\psi_X = h \circ \phi_X$
则称 (Z,ϕ) 为F的余极限.

从交换图上看就是下列F中的图表对任意 (H,ψ) 交换. 虚线表示图表交换的态射唯一

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[ddl, "\psi_X"'] \arrow[ddr, "\psi_Y"] & \\ & Z \arrow[dl, "\phi_X"] \arrow[dr, "\phi_Y"'] & \\ F(X) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(Y) \end{tikzcd}$$

极限

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "\phi_X"] \arrow[ddr, "\psi_X"'] & & F(Y) \arrow[dl, "\phi_Y"'] \arrow[ddl, "\psi_Y"] \\ & Z \arrow[d, dashed, "h"] & \\ & H & \end{tikzcd}$$

余极限.

极限"唯一性": 若 (Z_1,ϕ_1), (Z_2,ϕ_2) 都是 F 上的极限(余极限) 则 $Z_1 \cong Z_2$.

proof: $\exists!\, f: Z_1 \to Z_2$ s.t. $(\phi_1)_X = (\phi_2)_X \circ f$, 且 $\exists!\, g: Z_2 \to Z_1$ s.t. $(\phi_2)_X = (\phi_1)_X \circ g$, 于是 $g\circ f: Z_1 \to Z_1$ 满足 $\forall (\phi_1)_X$, $(\phi_1)_X = (\phi_1)_X \circ g \circ f$. 而 id_{Z_1} 显然即为 $\forall \phi$, $\phi \circ id_{Z_1} = \phi$, 而 id_{Z_1} 是唯一的(公理第三条), 故 $id_{Z_1} = g\circ f$, 同理可证 $f \circ g = id_{Z_2}$, 故 $Z_1 \cong Z_2$, 余极限情况类似 □

群的自由积.

设 G_1, G_2 是两个群, 形如 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 的形式表达式, 其中 $a_i \in G_1 \cup G_2$, 称为一个字, $n=0$ 情况称为空字. 字可以进行下列约化操作:

① a_i 为 G_1, G_2 中幺元时, 可把 a_i 去掉

② 字中连续出现两个在同一群中元素时, 可用它们乘积代替

可以证明,每个字 w 唯一决定一个约化字,即不可继续约化的字.

$G_1 * G_2$ 由所有约化字构成, 乘法定义为 $w_1 \circ w_2 = w_1 \# w_2$ 决定的约化字. 这里 # 表示把 w_1, w_2 直接拼接

$G_1 * G_2$ 构成一个群, 称为 G_1 与 G_2 的自由积.

自由积可以作为群范畴上余极限的一个典例.

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[dr, "\phi_1"'] & G_1 * G_2 \arrow[d, dashed, "h"] & G_2 \arrow[l, "\psi_2"'] \arrow[dl, "\phi_2"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

Seifert-van Kampen 定理.

设 $i_B^A: A \hookrightarrow B$ 为 $A \to B$ 的包含映射. 且 X, Y 都是 Z 的道路连通开子集, $Z = X \cup Y$, 且 $X \cap Y$ 也道路连通, 在 $X \cap Y$ 中任取基点 x_0, 则在群范畴下, 任取 H 和同态(态射), $\xi_X: \pi_1(X, x_0) \to H$, $\xi_Y: \pi_1(Y, x_0) \to H$, 下列图表交换.

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(X,x_0) \arrow[dr, "(i_{X\cup Y}^{X})_\pi"] \arrow[drr, "\xi_X"] & & \\
\pi_1(X\cap Y,x_0) \arrow[ur, "(i_X^{X\cap Y})_\pi"] \arrow[dr, "(i_Y^{X\cap Y})_\pi"'] & & \pi_1(X\cup Y,x_0) \arrow[r, dashed, "h"] & H \\
& \pi_1(Y,x_0) \arrow[ur, "(i_{X\cup Y}^{Y})_\pi"'] \arrow[urr, "\xi_Y"'] & &
\end{tikzcd}$$

上面的交换图中我们省略了 $\pi_1(X\cap Y, x_0) \to H$ 与 $\pi_1(X\cap Y, x_0) \to \pi_1(X\cup Y, x_0)$ 的箭头, 反正它们可以从交换图中其它同态唯一确定.

这一定理说明, $\pi_1(X\cup Y, x_0)$ 不仅是余锥还是余极限.

有限表出群*

群的生成元：设 C 是群 G 的一个子集，并且任取非幺元的 $g\in G$，g 都是由 C 中有限多个元素（可重复选取）求逆及求乘积所得。即：（并不要求 C 最小）

$$g = c_1^{\varepsilon_1}\cdots c_k^{\varepsilon_k}\ ,\quad c_i\in C,\ \varepsilon_i=\pm 1$$

则称 C 生成了群 G，且 C 为生成元组，如果 $|C|$ 有限，且称 G 为有限生成群。

e.g. 平凡群由空集 ϕ 生成，因为生成元组定义不含幺元

对于生成元组 C，我们也可以定义形式表达式 $w=c_1^{\varepsilon_1}\cdots c_k^{\varepsilon_k}$ 为一个字。若 w 中含有 $c^{-1}c$ 或 cc^{-1} 可以将其去掉，称为字的约化。不可再约化的字称为约化字，那么以 C 为字符集产生的所有约化字构成一个群 $F(C)$，称为 C 生成的自由群，群的幺元为空字，$w_1 * w_2 = \text{reduced}(w_1w_2)$，如果 C 为有限集，且称 $F(C)$ 为有限生成自由群，并称 $|C|$ 为其秩。

$\exists!\ \xi: F(C)\to G\ ,\quad a\mapsto a$ 为 $F(c)\to G$ 同态，其中 G 由 C 生成 $\square$

这里 $a\mapsto a$ 是指 ξ 把 $F(C)$ 中单字 a 映到 G 中元素 a 即生成元 a。前面说过 $w=c_1^{\varepsilon_1}\cdots c_k^{\varepsilon_k}$ 只能理解为形式表达式，而 ξ 是同态，即 w 在 $F(C)$ 中可理解为 $c_i^{\varepsilon_i}$ 的乘积，故 $\xi(w)=\xi(c_1)^{\varepsilon_1}\cdots\xi(c_k)^{\varepsilon_k}$ $= c_1^{\varepsilon_1}\cdot c_2^{\varepsilon_2}\cdots\cdot c_k^{\varepsilon_k}$ 这里 $\cdot$ 便可理解为 G 中乘积了。可见 ξ 以一种自然的方式给出了每一个字到群元的对应。而这也指出 ξ 是一个满同态，那么由同态核定理 $\ker\xi\lhd F(C)$ 且 $G\simeq F(C)/\ker\xi$。

群的表出：$\ker\xi$ 中元素称为 G 的关系，因为它告诉群 G 如果接受所有其判定，从而构成商群。

如果 $R\subseteq F(c)$ 的元素都是 G 的关系，即 $R\subseteq\ker\xi$。且 $F(C)$ 中包含 R 的最小正规子群 $[R]=\ker\xi$。则称 R 为 G 的生成关系组，并称表达式 $\langle C|R\rangle$ 为 G 的一个表出*，常常也用 $\langle C|R\rangle$ 表示商群 $F(C)/\ker\xi$。如果 $C=\{c_1,\cdots c_m\}$，$R=\{r_1,\cdots r_n\}$ 都是有限集，则称 G 为有限表出群。

总之 C 告诉你用哪些元素构成 G，R 告诉你哪些由 C 中元素构成的关系式为 G 中单位元。

已知 R 求 $[R]$。

设 $R\subseteq G$，$[R]$ 是由所有形如 $x_1r_1^{\varepsilon_1}x_1^{-1}\cdots x_nr_n^{\varepsilon_n}x_n^{-1}$，$x_i\in G$，$r_i\in R$，$\varepsilon_i=\pm 1$ 的元素构成的集合。则 $[R]$ 是包含 R 的 G 的最小正规子群。

Proof：首先证 $[R]\lhd G$，这要求左右陪集相等。$\forall y\in G$，$y(x_1r_1^{\varepsilon_1}x_1^{-1}\cdots x_nr_n^{\varepsilon_n}x_n^{-1})=$

$((yx_1r_1^{\varepsilon_1}x_1^{-1}y^{-1})(yx_2r_2^{\varepsilon_2}x_2^{-1}y^{-1})\cdots(yx_nr_n^{\varepsilon_n}x_n^{-1}y^{-1}))y \Rightarrow y[R]\supseteq[R]y$。同理有 $[R]y\supseteq y[R]$

故 $y[R]=[R]y$

再证 $[R]$ 最小，$\forall N\lhd G$ 且 $R\subseteq N$，$\forall r\in R\subseteq N$ 及 $x\in G\to xrx^{-1}\in N$ 这说明

$[R]$ 中元素 $x_1r_1^{\varepsilon_1}x_1^{-1}\cdots x_nr_n^{\varepsilon_n}x_n^{-1}\in N$。故 $[R]\subseteq N$。又由于 N 是任意的。故 $[R]$ 是最小的。$\square$

* 本节讨论的是群的"表出（presentation）"，注意与群的"表示（representation）"相区分。

* 由于 C 中不含 e，故 R 可以为空

群的表出并非唯一，最平凡的表出为 $\langle C \mid \ker \xi \rangle$.

从表出的观点看自由积：

设 G_1, G_2 具有表出 $\langle C_1 \mid R_1 \rangle$, $\langle C_2 \mid R_2 \rangle$, $C_1 \sqcup C_2$ 为其积，即 C_1 中每个元素替换为 $(C_1, 0)$ C_2 中元素替换为 $(C_2, 1)$，或者说取并集时把 C_1, C_2 相同元素看成不同的. $\eta_i: F(C_i) \to F(C_1 \sqcup C_2)$ 为同态、$\eta_1: C_1 \to C_1 \times \{0\}$, $c_i \mapsto (c_i, 0)$; $\eta_2: C_2 \to C_2 \times \{1\}$, $c_i \mapsto (c_i, 1)$. 对 R_i 中元素也可如此替换.

得到 $R_1 \sqcup R_2 = \eta_1(R_1) \cup \eta_2(R_2)$. 那么群的自由积可以表示为：

$$G_1 * G_2 = \langle C_1 \sqcup C_2 \mid R_1 \sqcup R_2 \rangle$$

从前面记号约定，$\langle C_1 \sqcup C_2 \mid R_1 \sqcup R_2 \rangle$ 表示商群 $F(C_1 \sqcup C_2)/\ker \xi$.

群的交换化

设群 G 具有表出 $\langle C \mid R \rangle$. 则群 $\langle C \mid R \cup \{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in C\} \rangle$ 称为群 G 的交换化.

$\forall a, b \in G$, $[a, b] \equiv aba^{-1}b^{-1}$ 称为 G 的一个换位子，G 的包含所有换位子的最小正规子群称为 G 的换位子群，记为 $[G, G]$. 下面不加证明地给出几条定理：

① 交换化 $G^{ab} \equiv \langle C \mid R \cup \{[a, b] \mid a, b \in C\} \rangle$ 是交换群

② $G^{ab} = G/[G, G]$

③ $[G, G]$ 由所有 G 中换位子生成

$\square$

任意群 G 都与其商群 G/H 同态. 取 $\rho: G \to G/H$ 为自然同态，即 $g \mapsto gH$.

这里 $G^{ab} = G/[G, G]$ 是 Abel 群. 我们把其乘法记为加法，方便后面推导. 这样 G 中元素 $g = c_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots c_{i_k}^{\varepsilon_k}$ 便可在 G^{ab} 中找到对应：$\rho(g) = \varepsilon_1 \rho(c_{i_1}) + \cdots + \varepsilon_k \rho(c_{i_k})$ 合并系数后便可理解为多项式：$\rho(g) = g_1\langle c_1 \rangle + \cdots + g_n \langle c_n \rangle$ ($c_i \equiv \rho(c_i)$)，我们比较感兴趣 $\rho(r_i)$, $r_i \in R$

设：$\rho(r_i) = a_{i1}\langle c_1 \rangle + \cdots + a_{in}\langle c_n \rangle$ 把其系数排成一个 $m \times n$ 矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为交换化系数矩阵，其中 a_{ij} 都是整数

定理：若 G 与 H 的交换化系数矩阵之间只相差一系列整系数初等变换，则 $G^{ab} \simeq H^{ab}$.

① 行(列)自乘整数倍后加到另一行上，② 行(列)自乘 -1

③ 行(列)互换

所以交换化系数矩阵唯一决定 G^{ab} 的同构类型.

交换群的直和:

$G_1, G_2 \subset G$, G 为交换群, $\forall g \in G$, $\exists! (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$, s.t. $g = g_1 + g_2$, 则称 G 为 G_1 与 G_2 (内) 直和 $G = G_1 \oplus G_2$. 如果 H_1, H_2 交换, 且 $G_1 \simeq H_1$, $G_2 \simeq H_2$, 则称 G 为 H_1, H_2 外直和, 有时也记为 $G = H_1 \oplus H_2$

这一概念、实质是群的直积在交换群上的限定.

有限生成交换群基本定理: 任何一个有限生成交换群 G 一定有如下形式外直和分解

$$G \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{r} \oplus \mathbb{Z}_{t_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{t_k}$$

$\mathbb{Z}$ 是无限循环群, $\mathbb{Z}_n$ 是 n 阶循环群, 且 $\forall j$, $t_j > 1$, t_j 整除 t_{j+1} (或 $t_j = t_{j+1}$). t_j 称为 G 的挠系数, r 称为 G 的秩. 两有限生成交换群同构 iff, t_j 与 r 均相等.

e.g. $G = \langle a, b \mid a^2, b^3 \rangle \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

而 $H \langle a, b \mid a, b^6 \rangle$ 交换化系数矩阵为 $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 故 $G^{ab} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \simeq \mathbb{Z}_6 \simeq H^{ab}$

但 $2 + 3$ 故 挠系数要按照 $\mathbb{Z}_6$ 计算

e.g. $G * H$ 的交换化矩阵. 设 A, B 分别为 G 和 H 的交换化系数矩阵. 且 $G * H$ 的交换化系数矩阵为 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, 这一点可从 $G * H \equiv \langle C_1 \sqcup C_2 \mid R_1 \sqcup R_2 \rangle$ 中看出, 因为这些元都是不交的, R_1, R_2 分别由 C_1, C_2 中元素线性组合表示了.

定理: 设 $\phi: G \to H$ 为同构, 且 G 有表出 $\langle C \mid R \rangle$, 则 H 有表出 $\langle C_\phi \mid R_\phi \rangle$

其中 $C_\phi = \{\phi(c) \mid c \in C\}$, $\phi_*: F(C) \to F(C_\phi)$, $c_1^{\varepsilon_1} \cdots c_n^{\varepsilon_n} \mapsto \phi(c_1)^{\varepsilon_1} \cdots \phi(c_n)^{\varepsilon_n}$ 是同构. 注意两边都是形式表达式. $R_\phi = \{\phi_*(r) \mid r \in R\}$

Proof: C_ϕ 生成 H 是显然的, R 中元素 $r = c_1^{\varepsilon_1} \cdots c_k^{\varepsilon_k}$ 有 $\xi_G(r) = e_G$, ξ 为前定义 $F(C) \to G$ 同态

$\xi_H(\phi_*(r)) = \phi(c_1)^{\varepsilon_1} * \phi(c_2)^{\varepsilon_2} \cdots * \phi(c_k)^{\varepsilon_k}$ $*$ 为 H 中乘法

而 $\xi_G(r) = c_1^{\varepsilon_1} \circ c_2^{\varepsilon_2} \circ \cdots \circ c_k^{\varepsilon_k}$, $\circ$ 为 G 中乘法. 由于 ϕ 为同构

$\xi_H \circ \phi_*(r) = \phi\left[c_1^{\varepsilon_1} \circ c_2^{\varepsilon_2} \circ \cdots \circ c_k^{\varepsilon_k}\right]$, $\phi(e_G) = e_H$ 故 $r \in R$ iff $\phi_*(r) \in R_\phi$ $\square$

Van Kampen 定理

前面提到的范畴上的 Van Kampen 定理过于抽象，不利于实际运用于基本群的计算. 可以从群的表出方面重新叙述

Van Kampen: 设 X,Y 是 Z 的开子集，$Z=X\cup Y$，$X\cap Y$ 非 ϕ 且道路连通

设 $i: X\cup Y\hookrightarrow X$, $j: X\cap Y\hookrightarrow Y$, $p: X\hookrightarrow X\cup Y$, $q: Y\hookrightarrow X\cup Y$ 是相应含入映射.

记为下面的交换图. 对于一个字 w，我们用 $\overline{w}$ 表示"按w计算"

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "p"] & \\
X\cap Y \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & X\cup Y \\
 & Y \arrow[ur, "q"'] &
\end{tikzcd}$$

在 $X\cap Y$ 中取定基点 x_0，并设 $\pi_1(X,x_0)$ 具有表出 $\langle C\mid R\rangle$，$\pi_1(Y,x_0)$ 有表出 $\langle D\mid S\rangle$，而 $\pi_1(X\cap Y,x_0)$ 有表出 $\langle E\mid T\rangle$. 对于每个生成元 $e\in E$，取定一个以 C 为字符集的字 e_C，使得在 $\pi_1(X,x_0)$ 中 $\overline{e_C}=i_\pi(e)$，再取定一个以 D 为字符集的字 e_D，使得在 $\pi_1(X\cup Y,x_0)$ 中 $\overline{e_D}=j_\pi(e)$，则 $\pi_1(X\cup Y,x_0)$ 即 $\pi_1(Z,x_0)$ 具有表出

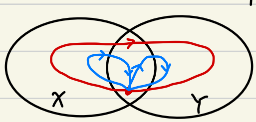
$$\langle C_{p_\pi}\cup D_{q_\pi}\mid R_{p_\pi}\cup S_{q_\pi}\cup\widetilde{E}\rangle$$

其中 $\widetilde{E}=\{p_\pi(e_C)^{-1}q_\pi(e_D)\mid e\in E\}$. 或者等价地讲，

$$\pi_1(X\cup Y,x_0)\cong(\pi_1(X,x_0)*\pi_1(Y,x_0))/N$$

其中 N 是自由积中包含所有形如 $i_\pi(e)^{-1}j_\pi(e)$，$e\in\pi_1(X\cap Y,x_0)$ 的字的最小正规子群.

这个定理叙述就已过于复杂，不过我们还是分开看一下. 首先是生成元 $C=C_{p_\pi}\cup D_{q_\pi}$，这是在说 $\pi_1(X\cup Y,x_0)$ 中任何闭道路类均可分解为一些完整包含于 X 或 Y 中的闭道路的乘积.

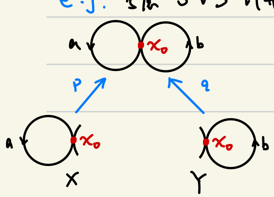


然后是生成关系. 首先是原本 $\pi_1(X,x_0)$, $\pi_1(Y,x_0)$ 中有的，另一类是 $\widetilde{E}$ 中的. $\widetilde{E}$ 的关系说明："如果表出一条道路的字中出现了形如 $p_\pi(e_C)$ 的字段，可用 $q_\pi(e_D)$ 替代. 它们按照计算均为 $X\cap Y$ 中的 $\langle e\rangle$.

另外，下面的两个特例也比较重要：

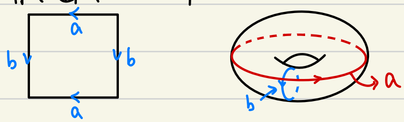
特例一：$X\cap Y$ 单连通，由于 $E=\phi\Rightarrow\widetilde{E}=\phi$ 故 $\pi_1(X\cup Y,x_0)$ 有表出 $\langle C_{p_\pi}\cup D_{q_\pi}\mid R_{p_\pi}\cup S_{q_\pi}\rangle$

e.g. 考虑 $S^1\vee S^1$ 计算. 即两个圆的一点并. $X\cap Y=\ )(x_0$ 是可缩的. 基本群平凡，而 X 可形变收缩为 S^1 故 S^1 与 X 同伦等价. 基本群同构为 $\mathbb{Z}$，有表出 $\langle\langle a\rangle_X\mid\ \rangle$，其中 $R_X=\phi$ 因为 $\langle a\rangle_X^n\neq\langle e\rangle$ ($n\neq0$, 因为 $e\notin C$)，同理 Y 有表出 $\langle\langle b\rangle_Y\mid\ \rangle$ 故 $\pi_1(S^1\vee S^1,x_0)$ 有表出 $\langle\langle a\rangle_{X\cup Y},\langle b\rangle_{X\cup Y}\mid\ \rangle$

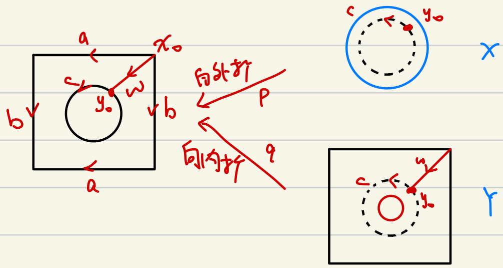


特例二：设X单连通，则 $C_{p_x}=\phi$，$R_{p_x}=\phi$，则 $\pi_1(X\cup Y,x_0)$ 表出为 $\langle D_{q_x}(S_{q_x}\cup\tilde{E})\rangle$，$\tilde{E}=\{q_x(e_0)|e\in E\}$

e.g. 环面T^2基本群有表出 $\langle\langle a\rangle,\langle b\rangle|\langle a\rangle\langle b\rangle\langle a\rangle^{-1}\langle b\rangle^{-1}\rangle$，a b 由下图解释.



T_2由正方形 $ab^{-1}a^{-1}b$ 粘合而成，可以把正方形作如下分解：



Y可强形变收缩为正方形的四条边所粘空间，而这又同胚于$S^1\vee S^1$，故$\pi_1(Y,x_0)$有表出 $\langle\langle a\rangle_Y,\langle b\rangle_Y|\rangle$。而推送同构将$\pi_1(Y,x_0)$表出变为$\pi_1(Y,y_0)$的表出 $\langle\alpha,\beta|\rangle$，$\alpha=w_\#(\langle a\rangle_Y)$，$\beta=w_\#(\langle b\rangle_Y)$

而 $X\cap Y$ 可强形变收缩为圆周。故 $\pi_1(X\cap Y,y_0)$ 有表出 $\langle\langle c\rangle_{X\cap Y}|\rangle$，从图中可看出，$c=\bar{w}ab\bar{a}\bar{b}w$，而由推送同构$w_\#$意义，$\langle c\rangle_Y=w_\#(\langle a\rangle_Y\langle b\rangle_Y\langle a\rangle_Y^{-1}\langle b\rangle_Y^{-1})=\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$，由于X单连通。故 $\pi_1(T^2,y_0)$表出为 $\langle\alpha,\beta|\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\rangle$。前面引入推送同构单纯是$\pi_1(T^2,y_0)$更易导出。现在可以用$w_\#$再推回$x_0$得$\pi_1(T^2,x_0)$表出

$$\langle\langle a\rangle_{T^2},\langle b\rangle_{T^2}|\langle a\rangle_{T^2}\langle b\rangle_{T^2}\langle a\rangle_{T^2}^{-1}\langle b\rangle_{T^2}^{-1}\rangle$$

从粘合规则可直接看出 $\langle a\rangle_{T^2},\langle b\rangle_{T^2}$ 的含义即为"纬线"和"经线"。

P.S. 我们在证明时为了直观，只在T^2的"展开图"上进行操作，实际上都要理解为粘合后的空间。比如Y强形变收缩的空间是正方形四条边按照 $ab\bar{a}\bar{b}$ 粘合的空间，而不是四条边本身。粘合后其类似于T_2的"骨架"，直观上看同胚于"○—○"，即$S^1\vee S^1$

闭曲面的基本群

从上例可以猜测对于多边形表示为 $a_{i_1}^{\varepsilon_1}\cdots a_{i_{2k}}^{\varepsilon_{2k}}$ ($i_1,\cdots i_{2k}\in\{1,\cdots k\}$，每个数字用两次) 的闭曲面，其基本群表出为 $\langle\langle a_{i_1}\rangle,\cdots,\langle a_{i_{2k}}\rangle|\langle a_{i_1}^{\varepsilon_1}\rangle\cdots\langle a_{i_{2k}}^{\varepsilon_{2k}}\rangle\rangle$，那么现在用标准多边形表示重新叙述为：

亏格为g的可定向闭曲面 gT^2 的基本群的表出为

$$\langle\alpha_1,\beta_1,\cdots\alpha_g,\beta_g|\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\cdots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}\rangle$$

亏格为k的不可定向闭曲面 kP^2 的基本群的表出为：

$\langle \alpha_1,\cdots,\alpha_k \mid \alpha_1\alpha_1\cdots\alpha_k\alpha_k\rangle$

特别地，球面 $S^2 = 0T^2$ 的表出为 $\langle 1\rangle$. □

根据这一定理，我们可以给出闭曲面分类定理的证明。首先所有闭曲面都可以写出标准多边形表示，所以一定可以归类到 gT^2 或 kP 中. 我们唯一要证明的是 gT^2、kP^2 之间互不同胚，而这只用证基本群互不同构. 而这很难证，转而考虑它们的交换化互不同构.

闭曲面分类定理证明: $\pi_1(gT^2)\cong\langle\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_g,\beta_g\mid\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\cdots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}\rangle$

其交换化系数矩阵为 $A=(0,0,\cdots,0)_{1\times g}$ 故 $\pi_1^{Abel}(gT^2)\simeq\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{2g\text{ copies}}$，秩为 $2g$ 没有扭系数. 所以 gT^2 之间互不同胚.

再看 kP^2. $\pi_1(kP^2)\cong\langle\alpha_1,\cdots\alpha_k\mid\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k\alpha_k\rangle$，交换化系数矩阵为

$A=(2,2,\cdots,2)_{1\times k}\xrightarrow{\text{变换}}(2,0,\cdots,0)_{1\times k}\Rightarrow\pi_1^{Abel}(kP^2)\simeq\langle\gamma,\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-1}\mid\gamma^2\rangle$

$\simeq\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{k-1}\oplus\mathbb{Z}_2$，秩为 $k-1$，扭系数为 2. 而这说明了 kP^2 之间互不同胚. 且

kP^2 与 gT^2 之间也互不同胚 □

映射度: S^1 的基本群为 $\mathbb{Z}$，把每个闭道路映射为对应的绕 S^1 圈数. 设 $f:S^1\to S^1$ 为连续映射. 且 $f_\pi(\langle a_{1,0}\rangle)=\langle a_{1,0}\rangle^n$ 其中 $a_{n,\theta}:[0,1]\to S^1,\ t\mapsto(\cos(2\pi nt+\theta),\sin(2\pi nt+\theta))$

则称 n 为 f 的映射度，记为 $\deg f\equiv n$.

其实直观上看 f 的作用相当于在 S^1 上多套了 n 圈.

如果 $f\simeq g$，则 $\deg f=\deg g$

Proof: 首先由 $(f\circ g)_\pi=f_\pi\circ g_\pi$ 知 $\deg f\circ g=\deg f\cdot\deg g$，考虑映射 $\rho_\theta:S^1\to S^1$.

$(\cos\phi,\sin\phi)\mapsto(\cos(\phi+\theta),\sin(\phi+\theta))$ 作用是在 S^1 旋转一个角度 $\theta\in(0,2\pi)$，显然:

$\deg\rho_\theta=1$. 故 $\forall f$, $\deg\rho_\theta\circ f=\deg f$.

再考虑 $f\simeq g$ 上的伦移 H，在 t 时刻切片记为 $h_t:S^1\to S^1$. h_t 将诱导 $\pi_1(S^1)$ 的同态. $\langle a_{n,\theta}\rangle\mapsto\langle h_t\circ a_{n,\theta}\rangle$ 但基点从 $x_0\to h_t(x_0)$. 考虑对道路 $h_t\circ a_{1,0}$ 作旋转 ρ_{θ_t}，其中 $h_t(x_0)=x_{\theta_t}$. 这样在作 $\rho_{\theta_t}^{-1}$ 后基点又回到了 x_0. 取道路切片. $a_t=\rho_{\theta_t}^{-1}\circ h_t\circ a_{1,0}$. 则 $a_0=\rho_{\theta_0}^{-1}\circ h_0\circ a_{1,0}$, $a_1=\rho_{\theta_1}^{-1}\circ h_1\circ a_{1,0}$ 则 a_t 构造了 $\rho_{\theta_0}^{-1}\circ f\circ a_{1,0}\to\rho_{\theta_1}^{-1}\circ g\circ a_{1,0}$ 的定端伦移，因此它们同伦，故映射度相等:

$$\deg(\rho_{\theta_0}^{-1}\circ f\circ a_{1,0})=\deg(\rho_{\theta_1}^{-1}\circ g\circ a_{1,0})\Rightarrow\deg f=\deg g$$

其逆否命题:"映射度不相等的连续映射不可能互相同伦"比较有用. □

上面的这些准备工作都是为了证明以下两个基本定理:

Brouwer 不动点定理:

考虑单位闭实心球 $D^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{E}^n \mid x_1^2+\cdots+x_n^2\leq 1\}$, 则 $\forall$ 连续映射 $f: D^n\to D^n$, 一定存在 $x\in D^n$ 满足 $f(x)=x$. (即存在不动点.)

Proof: 只证 $n=2$. $n>2$ 要用高维同调群构造证明. 但证明思想一样.