日期: /

Part Ⅰ 统计力学复习

热力学:

$E(S,V,N)$: $\quad dE = TdS - PdV + \mu dN$

$\downarrow -TS$

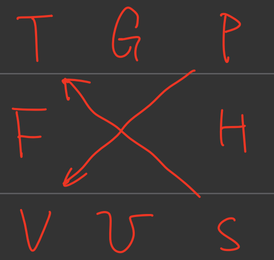
$F(T,V,N)$: $\quad dF = -SdT - PdV + \mu dN$

$\downarrow -\mu N$

$\Omega(T,V,\mu)$: $\quad d\Omega = -SdT - PdV - Nd\mu$

$\cdots$

勒让德变换



外微分:

exact: if $\exists u$, s.t $\omega = du$

恰当

closed: if $d\omega = 0$

闭

$$\text{exact} \underset{\text{locally}}{\overset{\vee}{\rightleftarrows}} \text{closed}$$

dE本身是exact的,因为E是状态量.
而第一定律说
$dE = đQ - đW + \mu dN$
这里 $đQ$, $đW$ 均不恰当. $đW = pdV \Rightarrow \frac{đW}{p}$ 恰当,
p为积分因子, 同样, 由克劳修斯熵式(热=前身)
$\frac{đQ}{T} = ds$ 恰当, T为积分因子, 故
$\underbrace{dE = Tds - pdV + \mu dN}_{\text{exact}}$

$$dE = TdS - PdV + \mu dN$$

$$\overset{d}{\Rightarrow} 0 = (d \circ d)E = dT \wedge dS - dP \wedge dV + d\mu \wedge dN$$

$$= -dS \wedge dT - dP \wedge dV + d\mu \wedge dN$$

$$= d(\underbrace{-SdT - PdV + \mu dN}_{\text{closed}}) \quad ?$$

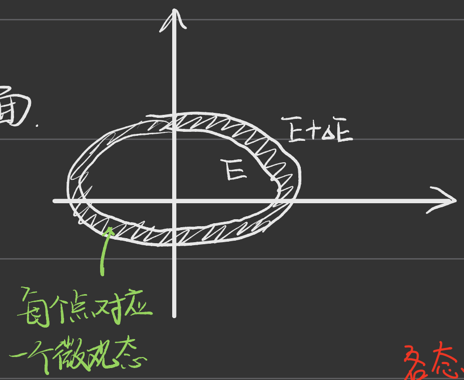
closed $\Longrightarrow$ exact $\quad \omega = dF$

统计力学

约束条件：E，V，N

↓

Γ空间一张曲面.



各态历经假说

准各态历经假说

（林宗涵 P303~P304）

各态历经 ⇒ 时间平均 = 系综平均

各态历经假说肯定是错的. 我看到有观点认为应当扔掉 ⟨O⟩ 是时间平均这一想法. 认为观察到的就是系综平均本身

等概率原理：对于处于平衡态下的孤立系，各个可能的微观态等概率.

Q：如何描述系统的状态？

A：

经典		量子
6N维相空间中1个点.（Gibbs）	$\xleftrightarrow{\text{对应}}$	整个系统的量子数／态

经典统计存在一系列不好讲清楚的问题，我当初学统计力学是直接看 Kerson Huang. 用密度算符描述量子系统，而上面对应定理只是一个 T→∞ 时的半经典近似（WKB）近似 用对应定理来引入系统对本讨论班而言或许已足够. 更好的表述还是重心海上次来讲用的密度算符理论.（两种等价，一个是态的观点，一个是 $\hat{\rho}$ 的观点

配分函数：

微正则：$\Omega = \sum_s 1$，$P_s = \frac{1}{\Omega}$

正则：$Z_N = \sum_s e^{-\beta E_s}$，$P_s = \frac{1}{Z_N} e^{-\beta E_s}$

日期:　　/

巨正则: $Z_G=\sum_s e^{-\beta(E_s-\mu N_s)}$, $P_s=\frac{1}{Z_G}z^{N_s}e^{-\beta E_s}$

$$=\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{S(N)}e^{-\beta E_{S(N)}}e^{\beta\mu N}$$

$z:=e^{\beta\mu}$

$$=\sum_{N=0}^{\infty}z^N Z_N$$

这块不打算讲

近独立子系

$f=\frac{1}{e^{\beta E}+\delta}$ $\begin{cases}\delta=0 & \text{Boltzmann}\\ \delta=-1 & \text{Bose}\\ \delta=1 & \text{Fermion}\end{cases}$

$T\to\infty$时 $f_B\to f$

Z_G 与 $Z_{G,\vec{k}}$

$$Z_G=\sum_S e^{-\beta(E_S-\mu N_S)}$$

$$=\sum_{\{n_{\vec{k}}\}}e^{-\beta\sum_{\vec{k}}n_{\vec{k}}\varepsilon_{\vec{k}}-\mu n_{\vec{k}}}$$

这个是对一个确定的$\{n_{\vec{k}}\}$中的各个$\vec{k}$求和

这个求和是对不同的$\{n_{\vec{k}}\}$(即微观态)求和

$$=\sum_{\{n_{\vec{k}}\}}\prod_{\vec{k}}e^{-\beta n_{\vec{k}}(\varepsilon_{\vec{k}}-\mu)}$$

另一种思路:

单粒子的态

将整个系统划分出若干子系统，每个子系统是一个态，态上可能有若干粒子.

这些子系统用$\vec{k}$标记，且它们是可区分且无相互作用的. 那么整个系统的配分函数便

态

可以写成子系统的配分函数之积.

$$Z=\underbrace{(\overset{0个}{\bigcirc}+\overset{1个}{\bigcirc}+\cdots+\bigcirc)}_{态1}\underbrace{(\overset{0个}{\bigcirc}+\overset{1个}{\bigcirc}+\cdots)}_{态2}\cdots\underbrace{(\quad)}_{\cdots}$$

⋮

态2

态1

$$=\prod_{\vec{k}}\sum_{n_{\vec{k}}}e^{-\beta n_{\vec{k}}(\varepsilon_{\vec{k}}-\mu)}$$

$\vec{k}$态上可能的粒子数

各个括号中的项先乘起来

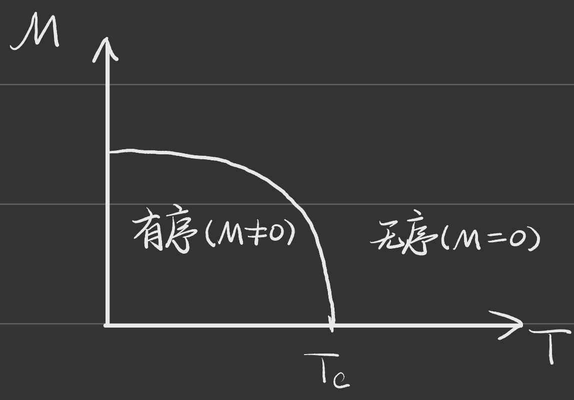
再相加就是 $\sum_{\{n_{\vec{k}}\}}\prod_{\vec{k}}e^{-\beta n_{\vec{k}}(\varepsilon_{\vec{k}}-\mu)}$

单个态的配分函数 $Z_{G,\vec{k}}=\sum_{n_{\vec{k}}}e^{-\beta n_{\vec{k}}(\varepsilon_{\vec{k}}-\mu)}$

日期:　　/

Part II 朗道相变

Order parameter (序参量)



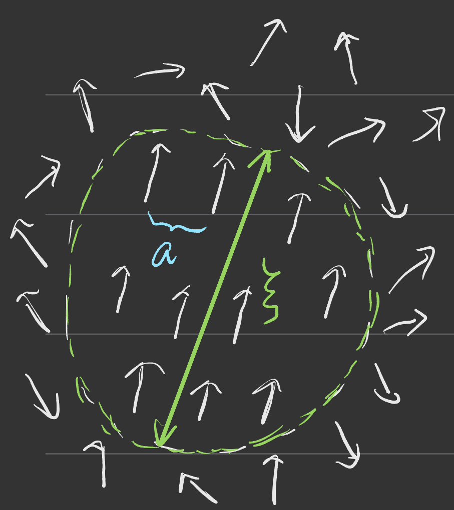
$$H = -\frac{J}{2}\sum_{\langle ij\rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

具有 SO(3) symm.

$T > T_c$，无特殊方向，H 的对称性得到尊重．SO(3)

$T < T_c$，自发磁化，出现一个特殊方向 $\vec{S}_0$，对称性自发破缺．SO(2)

Correlation functions



$$\langle \vec{S}_i \rangle = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ \vec{S}_0 & T < T_c \end{cases}$$

($\forall \vec{S}_i$，$\langle \vec{S}_i \rangle$ 均为 $\vec{S}_0$，是系统平移不变性的要求)

$G^{(2)}(i,j) := \langle \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \rangle$　反应了对齐程度

↓ 平移不变

$i - j$

↓ 旋转不变

$r = |i - j|$

$$G_c^{(2)}(r) := \langle (\vec{S}_i - \vec{S}_0) \cdot (\vec{S}_j - \vec{S}_0) \rangle$$

$$= \langle \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \rangle - |\vec{S}_0|^2 \quad \text{协方差.}$$

日期: /

期望值分别为$E[X]$与$E[Y]$的两个实随机变量X与Y之间的**协方差**$Cov(X,Y)$定义为：

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E[(X-E[X])(Y-E[Y])] \\
&= E[XY] - 2E[Y]E[X] + E[X]E[Y] \\
&= E[XY] - E[X]E[Y]
\end{aligned}
$$

相关系数

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

- correlation length:

QFT

$$G_c^{(2)}(r) \simeq e^{-r/\xi} \qquad r \gg a, \quad T \neq T_c$$

when $T = T_c$,

$$G_c^{(2)}(r) \simeq \frac{1}{r^{d-2+\eta}} \qquad r \gg a, \quad T = T_c$$

合并为:

$$G_c^{2}(r) = \frac{1}{r^{d-2+\eta}} f\left(\frac{r}{\xi}\right)$$

- scale invariance
  (标度不变性)

$$a \longrightarrow a' = \lambda a$$

conformal transformation

$$a \rightarrow a' = \lambda(\vec{x}) a$$

$$\Rightarrow \quad r \longrightarrow r' = r/\lambda$$

若 $\vec{S}$ 按 $\vec{S} \longrightarrow \vec{S}' = \lambda^{(d-2+\eta)/2}\vec{S}$ 变化,

则 $G_c^{(2)\prime} = \lambda^{d-2+\eta} G_c^{(2)}$

$$= \left(\left(\frac{r}{\lambda}\right)^{d-2+\eta}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{r'^{\,d-2+\eta}}$$ is invariant

日期: /

Critical exponents

Exponent	Definition	Condition
α	$C \sim \mid T-T_c \mid^{-\alpha} \propto \mid t \mid^{-\alpha}$	$B=0$
β	$M \sim (T_c - T)^{\beta} \propto \mid -t \mid^{\beta}$	$T < T_c,\ B=0$
γ	$\chi \sim \mid T-T_c \mid^{-\gamma} \propto \mid t \mid^{-\gamma}$	$B=0$
δ	$B \sim \mid M \mid^{\delta}$	$T = T_c$
ν	$\xi \sim \mid T-T_c \mid^{-\nu} \propto t^{-\nu}$	$B=0$
η	$G_c^{(2)} \sim r^{-(d-2+\eta)}$	$T=T_c$

Table 1.1 *Definition of the critical exponents.*

Scaling laws.

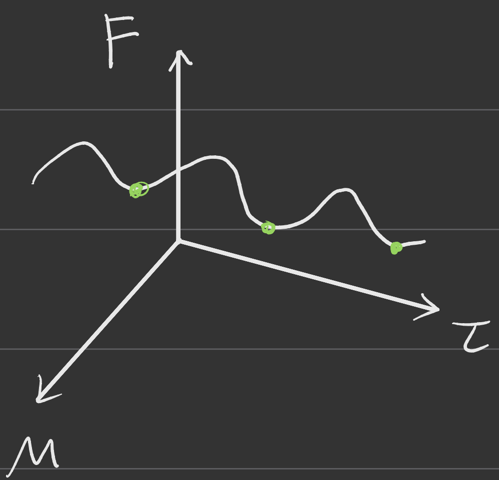
$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2;$$
$$\alpha + \beta\delta + \beta = 2;$$
$$\nu(2-\eta) = \gamma;$$
$$\alpha + \nu d = 2,$$

$$t \equiv \frac{T-T_c}{T_c}$$

Landau's theory (简化版)

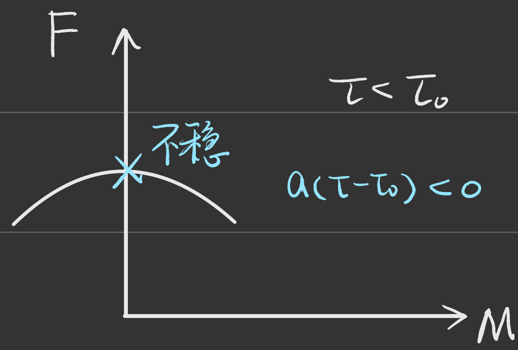
一阶: 有latent heat, a finite correlation length, mixed-phase

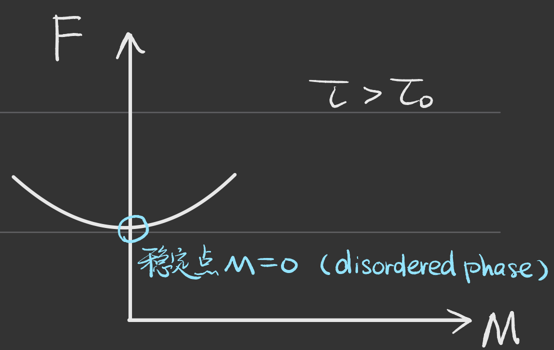
二阶: 无latent heat. the divergence of ξ



Assumption: F_L has Z_2 symm.

$$F_L = F_0 + \frac{a}{2}(\underbrace{\tau}_{= k_B T} - \tau_0) M^2 + \frac{b}{4} M^4 + \frac{c}{6} M^6 + \cdots$$





τ_c :

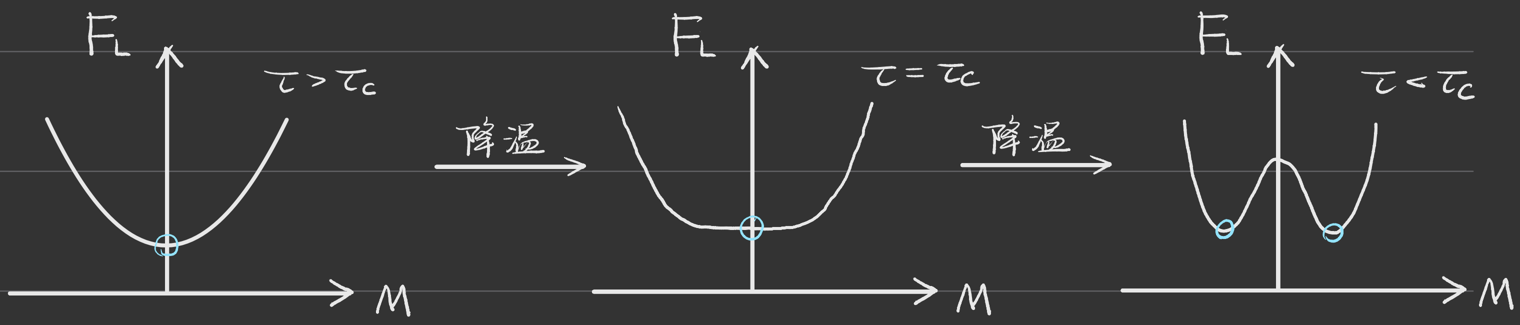
2^{nd} order : $\tau_c = \tau_0$

1^{st} order : $\tau_c > \tau_0$

- 2^{nd} order phase transition $(b>0)$

Drop M^6 term,

$$F_L = F_0 + \frac{a}{2}(\tau-\tau_0)M^2 + \frac{b}{4}M^4$$

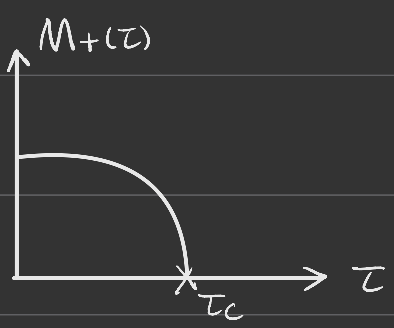


极值点: $\frac{\partial F_L}{\partial M} = 0 \Rightarrow M_0 = 0,\ M_\pm = \pm\sqrt{\frac{(\tau_0-\tau)a}{b}} \propto (-t)^{\frac{1}{2}}$

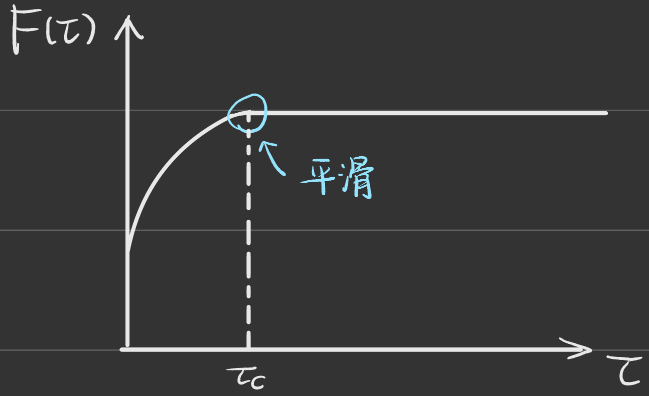
Critical temp. :

$$F_L(\tau_c, M_0) = F_L(\tau_c, M_+)$$

$\longrightarrow \tau_c = \tau_0$



$$F(\tau)=F_L(\tau,M)_{min}=\begin{cases}F_0\ , & (\tau>\tau_c)\\ F_0-\frac{a^2}{4b}(\tau_c-\tau)^2\ , & (\tau<\tau_c)\end{cases}$$



$$\frac{\partial F}{\partial \tau}=\begin{cases}0\ , & (\tau>\tau_c)\\ \frac{a^2}{2b}(\tau_c-\tau)\ , & (\tau<\tau_c)\end{cases}$$

latent heat: $\sigma:=\frac{S}{k_B}=-\frac{\partial F}{\partial \tau}$

$$L=\tau\Delta\sigma=\tau_c\left(\sigma(\tau_c^+)-\sigma(\tau_c^-)\right)$$

$$=\tau_c(0-0)=0$$

$$\lim_{\tau\to\tau_c^-}-\frac{\partial F}{\partial \tau}=0$$

二阶相变无潜热

Landau's theory 给出:

$$\beta=\frac{1}{2}\ ,\ \gamma=1\ ,\ \delta=3\ ,\ \alpha=0$$

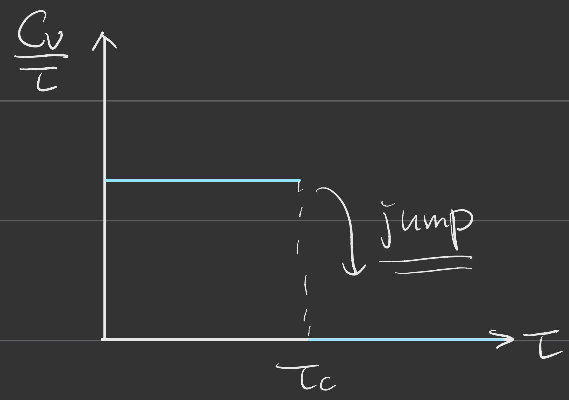
Q: 为什么叫二阶相变?

A:

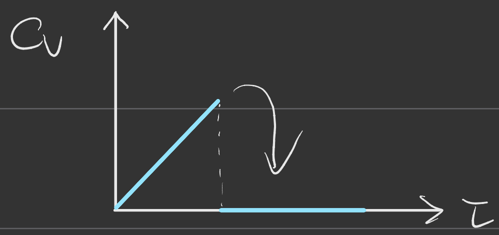
可推广至化学势的二阶偏微分发生突变(未必是对T偏导)

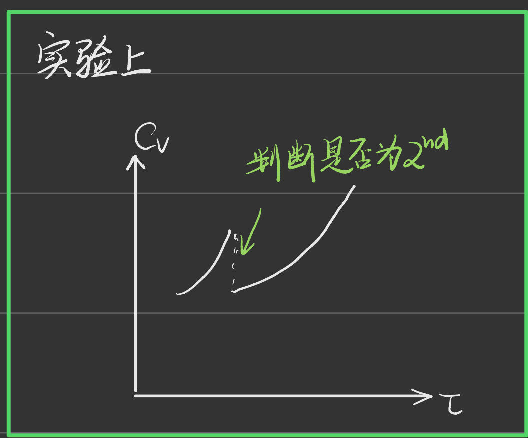
一阶导 $\frac{\partial F}{\partial \tau}$ 连续, 二阶导 $\frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2}$ 不连续.

此外, $\frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2}=-\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}=-\frac{1}{\tau}\left(\tau\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}\right)=-\frac{1}{\tau}C_V\Rightarrow C_V=-\tau\frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2}$



$\Rightarrow$



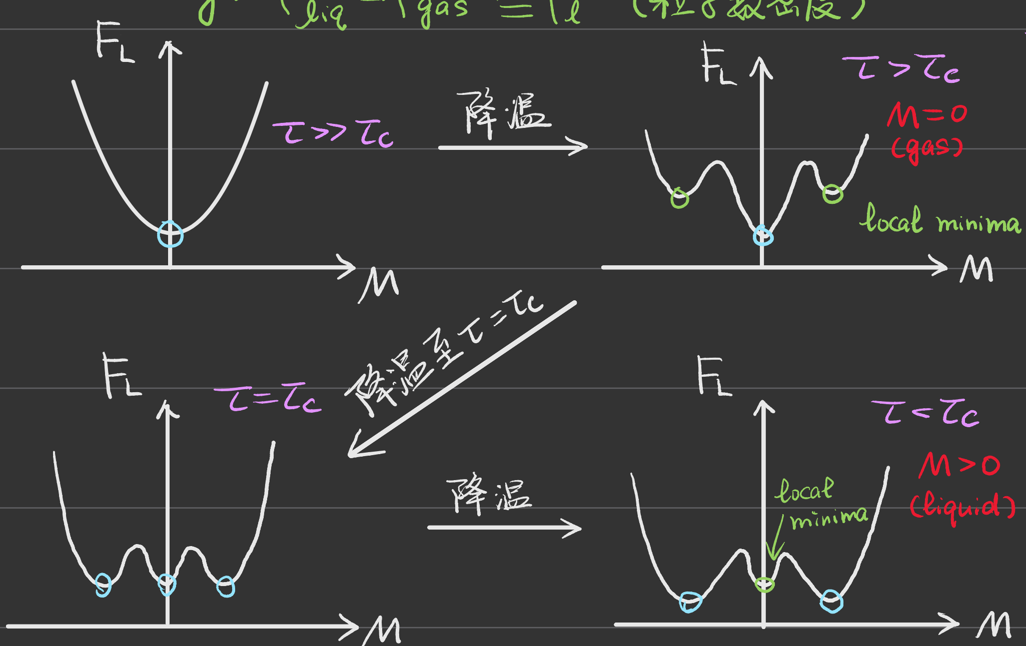


- 1^{st} order phase transition $(b<0)$

$$F_L(M) = F_0 + \frac{a}{2}(\tau-\tau_0)M^2 - \frac{|b|}{4}M^4 + \underbrace{\frac{c}{6}M^6}$$

eg. $\rho_{liq} - \rho_{gas} \hat{=} \rho_\ell$ (粒子数密度)

要加入M^6 term，否则会是不稳定的系统 ($M \to \pm\infty$时，$F_L \to -\infty$)



日期:　　/

极小值点: $\frac{\partial F_L}{\partial M}=0 \Rightarrow a(T-T_0)M-|b|M^3+cM^5=0$

$$\Rightarrow M_0=0,\quad M_\pm=\pm\left(\frac{|b|+\sqrt{b^2-4ac(T-T_0)}}{2c}\right)^{\frac{1}{2}}$$

若是"−"，则对应两个极大值点

T_c:

$$F_L(M_0,T_c)=F_L(M_+,T_c)$$

```
In[1]:= M =
  Solve[a/2 (τ - τ0) M^2 + b/4 M^4 + c/6 M^6 == 0 /.
  |解方程
     M → ((-b + Sqrt[b^2 - 4 a c (τ - τ0)])/(2 c))^(1/2), τ]

Out[1]= {{τ → τ0}, {τ → (3 b^2 + 16 a c τ0)/(16 a c)}}
```

$T_c=T_0+\frac{3b^2}{16ac}>T_0$,
降温时先经过T_c

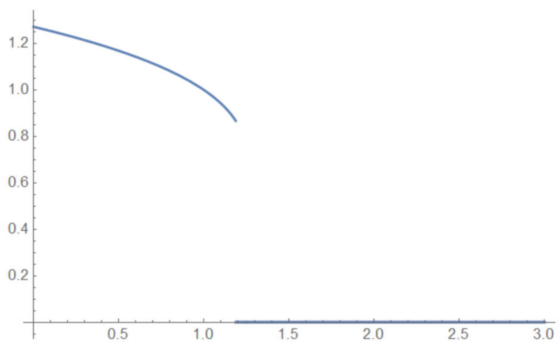
由于我们假定系数 $b(T)$ 在温度 T_c 附近是负的，所以系统在发生一级相变时，它的序参量会从 $\mathcal{M}=0$ 跃变到 $\mathcal{M}=\mathcal{M}_0=\sqrt{-3b(T_c)/4c(T_c)}$。同时我们看到，在一级相变发生时，二级相变还没有发生，因为这时的温度仍然高于二级相变的相变温度。

这个M_0指的是让F_L最小的M，即$\begin{cases}0 & (T>T_c)\\ M_+ & (T<T_c)\end{cases}$

M的跃变

```
b = -1;
a = 1;
c = 1;
τ0 = 1;

Show[Plot[HeavisideTheta[(3 b^2 + 16 a c τ0)/(16 a c) - τ] ((-b + Sqrt[b^2 - 4 a c (τ - τ0)])/(2 c))^(1/2), {τ, 0, 3}], Plot[0, {τ, (3 b^2 + 16 a c τ0)/(16 a c), 3}]]
```



F(τ):

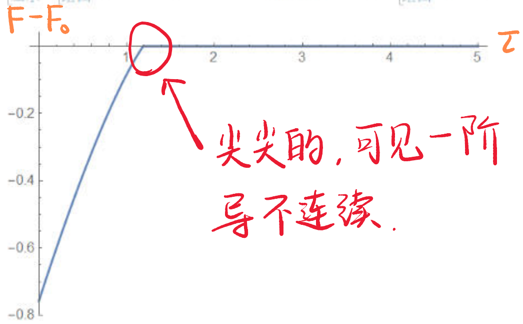
```
F[M_, τ_] := a/2 (τ - τ0) M^2 + b/4 M^4 + c/6 M^6;

f[τ_] := F[Sqrt[(-b + Sqrt[b^2 - 4 a c (τ - τ0)])/(2 c)], τ]

a = 1;
b = -1;
c = 1;
τ0 = 1;

Show[Plot[f[τ], {τ, 0, (3 b^2 + 16 a c τ0)/(16 a c)}], Plot[0, {τ, (3 b^2 + 16 a c τ0)/(16 a c), 5}], PlotRange → Automatic]
```

τ_c



尖尖的, 可见一阶导不连续.

$$L = \tau\Delta\sigma$$

$$= -\tau_c\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\Big|_{\tau_c^+} - \frac{\partial F}{\partial \tau}\Big|_{\tau_c^-}\right)$$

$$\neq 0$$

一阶相变有潜热

重点. 这部分就好, 虽然 Landau 相变是个唯象论, 但对 critical index 的预言很准 (甚至精确)

Part Ⅲ Ising model

一维 Ising model

$$\uparrow\uparrow \qquad\qquad \uparrow\downarrow$$

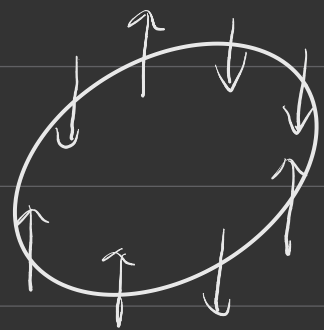
$$-J \qquad\qquad\qquad +J$$

吸收 μ_0 的基础上，又吸收 $3\mu_B$（即 $\mu_0\mu_B H$）

$$E=-J\underbrace{\sum_{\langle i,j\rangle}}_{\text{相同的一对只计算一次}} s_i s_j - H\sum_{i=1}^{N} s_i$$

一维伊辛模型不存在相变.

加上外场的考虑



有外场时选用环形边界

（$N\to\infty$ 时，自由边界与环形边界等价）

$$E=-J\sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1} - H\sum_{i=1}^{N} s_i$$

$$=-J\sum_{\text{loop}}\sigma_i\sigma_{i+1} - H\sum_{i=1}^{N}\sigma_i \quad (\sigma_1=\pm1,\ \sigma_2=\pm1,\cdots)$$

loop → 指 $\sigma_{N+1}=\sigma_1$

故

$$Z=\sum_{\{\sigma_i\}} e^{\sum_{\text{loop}}(\beta J\sigma_i\sigma_{i+1}+\beta H\sigma_i)}$$

写成更对称的形式

$$=\sum_{\{\sigma_i\}} e^{\sum_{\text{loop}}\left(\beta J\sigma_i\sigma_{i+1}+\frac{\beta H}{2}(\sigma_i+\sigma_{i+1})\right)}$$

指数上相加化为相乘

$$=\sum_{\{\sigma_i\}}\prod_{\text{loop}} e^{\beta J\sigma_i\sigma_{i+1}+\frac{\beta H}{2}(\sigma_i+\sigma_{i+1})}$$

日期:　　/

把每一项拿出，作为 σ_i 和 σ_{i+1} 的函数

$$\phi(\sigma_i,\sigma_{i+1}) = e^{\beta H\frac{\sigma_i+\sigma_{i+1}}{2}+\beta J\sigma_i\sigma_{i+1}} = \begin{cases} e^{\beta H+\beta J} & (\sigma_i,\sigma_{i+1})=(1,1) \\ e^{-\beta J} & (\sigma_i,\sigma_{i+1})=(1,-1) \\ e^{-\beta J} & (\sigma_i,\sigma_{i+1})=(-1,1) \\ e^{-\beta H+\beta J} & (\sigma_i,\sigma_{i+1})=(-1,-1) \end{cases}$$

构造矩阵 $\Phi_{i,i+1} = \begin{pmatrix} e^{\beta H+\beta J} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{-\beta H+\beta J} \end{pmatrix}$

并选取表象:

$$\sigma_i = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_i = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则

$$\phi(\sigma_i,\sigma_{i+1}) = \langle \sigma_i | \Phi_{i,i+1} | \sigma_{i+1} \rangle$$

则 $$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} \prod_{loop} \langle \sigma_i | \Phi_{i,i+1} | \sigma_{i+1} \rangle$$

$$= \sum_{\{\sigma_i\}} \langle \sigma_1 | \Phi | \sigma_2 \rangle \langle \sigma_2 | \Phi | \sigma_3 \rangle \cdots \langle \sigma_{N-1} | \Phi | \sigma_N \rangle \langle \sigma_N | \Phi | \sigma_1 \rangle$$

$$= \sum_{\sigma_1=\pm1} \langle \sigma_1 | \Phi \underbrace{\left(\sum_{\sigma_2=\pm1} |\sigma_2\rangle\langle\sigma_2|\right)}_{\text{单位阵}} \Phi \underbrace{\left(\sum_{\sigma_3=\pm1} |\sigma_3\rangle\langle\sigma_3|\right)}_{\text{单位阵}} \cdots \Phi | \sigma_1 \rangle$$

$$= \sum_{\sigma_1=\pm1} \langle \sigma_1 | \Phi^N | \sigma_1 \rangle$$

$$= tr(\Phi^N) = \lambda_1^N + \lambda_2^N$$

日期:　　/

Φ^N的迹是Φ的本征值λ_1，λ_2的N次方的和.

下面求λ_1和λ_2

$$\begin{vmatrix} e^{\beta H+\beta J}-\lambda & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{-\beta H+\beta J}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{e^{\beta H+\beta J}+e^{-\beta H+\beta J} \pm \sqrt{(e^{\beta H+\beta J}-e^{-\beta H+\beta J})^2+4(e^{-\beta J})^2}}{2}$$

较大的一根λ_+，较小的一根λ_-

故$N\to\infty$时，λ_+^N的贡献主导，即$Z \doteq \lambda_+^N$

磁化强度

$$M = -\left(\frac{\partial F}{\partial H/\mu_B}\right)$$ 吸收的μ_B要补上

$$= -N(-kT)\frac{\partial \ln\lambda_+}{\partial H}\mu_B$$

$$= N\mu_B kT \frac{\beta \sinh(\beta H)}{\sqrt{\sinh^2(\beta H)+e^{-4\beta J}}}$$

$$= N\mu_B \frac{\sinh(\beta H)}{\sqrt{\sinh^2(\beta H)+e^{-4\beta J}}}$$

和教材的$\langle\sigma\rangle$只差一个$N\mu_B$

日期: /

考虑自发磁化：$H=\mu_B\mu_0 H_{磁场强度}=0$

有限温度下，

$$\lim_{H\to 0,\,T>0} M = 0$$

绝对零温时，

$$\lim_{H\to 0,\,T=0} M = N\mu_B$$

一维 Ising 模型只有在绝对零温时才为铁磁相，在任意有限温度下都不会发生相变。

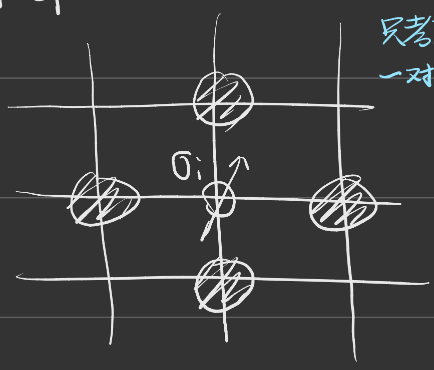
[14]所谓严格求解是指可以解析地计算出系统的配分函数（从而也可以得到所有热力学量）。一个里程碑性的成果是 Onsager 在 1944 年发表的关于二维易兴模型的严格解。这是人们得到的第一个非平庸的、有相互作用的统计模型的严格解。后来，又有一大类二维的模型找到了严格解。但是这些求解的方法无法推广到高维模型。二维模型具有严格的可解性是得益于二维的共形群（Conformal Group）的无穷多的对称性造成的。

二维 Ising model（介绍 mean-field approximation）

$$H=-\frac{J}{2}\sum_{\langle i,j\rangle}\sigma_i\sigma_j - B\sum_i\sigma_i$$

只考虑相邻，但每一对将被计入2次

N spin



$z=4$

$$m := \frac{1}{N}\left\langle\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\right\rangle = \langle\sigma\rangle$$

☆：

$$\sigma_i\sigma_j = (\underbrace{\sigma_i-\langle\sigma\rangle}_{\delta\sigma_i}+\langle\sigma\rangle)(\underbrace{\sigma_j-\langle\sigma\rangle}_{\delta\sigma_j}+\langle\sigma\rangle)$$

$$= \langle\sigma\rangle^2 + \langle\sigma\rangle(\delta\sigma_i+\delta\sigma_j) + \delta\sigma_i\delta\sigma_j$$

Assumption: drop $\delta\sigma_i\delta\sigma_j$ term

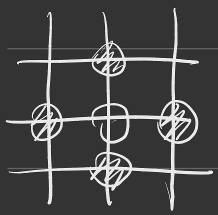
日期: /

mean-field approximation

$$\therefore \sigma_i\sigma_j \stackrel{\downarrow}{\cong} \langle\sigma\rangle^2 + \langle\sigma\rangle(\sigma_i+\sigma_j-2\langle\sigma\rangle)$$

$$= \langle\sigma\rangle(\sigma_i+\sigma_j) - \langle\sigma\rangle^2$$

$$H \cong -\frac{J}{2}\sum_{\langle i,j\rangle}\Big(\underbrace{\langle\sigma\rangle(\sigma_i+\sigma_j)}\ \underbrace{-\langle\sigma\rangle^2}\Big) - B\sum_i \sigma_i$$



$$= +\frac{J}{2}\underbrace{Nz\langle\sigma\rangle^2} - \frac{J}{2}\langle\sigma\rangle \underbrace{2z\sum_i \sigma_i} - B\sum_i \sigma_i$$

σ_i在$\langle i,j\rangle$的i取i时,
j有z个选择,故被计入z次.
当i取i的"邻居"时(有z个邻居),
又可取$j=i$,便又被计入z次.共$2z$次

$$= \frac{1}{2}NJz\langle\sigma\rangle^2 - (Jz\langle\sigma\rangle + B)\sum_i \sigma_i$$

$$Z_N = \sum_S e^{-\beta H_S}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\beta NJz\langle\sigma\rangle^2}\sum_{\{\sigma\}} e^{\beta(Jz\langle\sigma\rangle+B)\sum_i \sigma_i} \qquad (*)$$

$$= e^{-\frac{\beta}{2}NJz\langle\sigma\rangle^2}\sum_{\{\sigma\}}\prod_i e^{\beta(Jz\langle\sigma\rangle+B)\sigma_i}$$

$$= e^{-\frac{\beta}{2}NJz\langle\sigma\rangle^2}\Big(\sum_{\sigma=\pm1} e^{\beta(Jz\langle\sigma\rangle+B)\sigma}\Big)^N$$

$$= e^{-\frac{\beta}{2}NJz\langle\sigma\rangle^2}\Big(2\cosh(\beta Jz\langle\sigma\rangle + \beta B)\Big)^N$$

由(*):

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial Z_N}{\partial B} = e^{-\frac{1}{2}\beta N J z\langle\sigma\rangle^2}\sum_{\{\sigma\}}\left(\sum_i \sigma_i\right)e^{\beta(Jz\langle\sigma\rangle+B)\sum_i\sigma_i}$$

$$= \sum_S \left(\sum_i \sigma_i\right) e^{-\beta H_S}$$

$$= \sum_S \left(\sum_i \sigma_i\right) \frac{e^{-\beta H_S}}{Z_N} Z_N$$

$$= \sum_S \left(\sum_i \sigma_i\right) P_S Z_N$$

$$= \left\langle \sum_i \sigma_i \right\rangle Z_N$$

$$\Rightarrow \langle\sigma\rangle = \frac{1}{N}\left\langle \sum_i \sigma_i \right\rangle$$

$$= \frac{1}{N\beta}\frac{\partial \ln Z_N}{\partial B}$$

$$= \frac{1}{N\beta} N \frac{\sinh(\beta J z\langle\sigma\rangle+\beta B)}{\cosh(\beta J z\langle\sigma\rangle+\beta B)}\beta$$

$$= \tanh(\beta J z\langle\sigma\rangle+\beta B)$$

若要有自发磁化，则应在$B=0$时，$\langle\sigma\rangle = \tanh(\beta J z\langle\sigma\rangle)$有非零解.

Critical temp.: $T_c = \frac{1}{k_B} J z$