# 理论物理讨论班讲义

刘蔚韬　毛柯翔

2024 年 5 月 5 日　立夏

## 1　2D-Ising 模型的传递矩阵方法

为什么要专门讨论一下传递矩阵解法？因为有更加广泛的适用性。可以用于解其它的二维格点结构。

其主要思想在 Chapter2 中有过论述，这里回顾一下一维 Ising Model 的传递矩阵解法，然后再将之类比推广到二维的情况。

### 1.1　传播子与配分函数

这里进行一个量子力学的复习喵。回忆波动力学的传播子描述，有

$$\psi(x'',t) = \int \mathrm{d}x' K(x'',t;x',t_0)\psi(x',t_0) \tag{1}$$

在知道哈密顿量时（我们这里方便起见默认不含时，或者各不同时间时对易），一定可以构造这样的传播子，有：

$$K(x'',t;x',t_0) = \sum_{a'} \langle x'|a'\rangle\langle a'|x''\rangle \exp\frac{-iE_{a'}(t-t_0)}{\hbar} \tag{2}$$

其中 $|a'\rangle$ 是哈密顿量的能量本征右矢。

对传播子令 $x''=x'$ 做一个积分（本质上相当于求迹）有：（同时，取 $t_0=0$）

$$\begin{aligned}
G(t) &= \int \mathrm{d}x' K(x',t;x',0) \\
&= \int \mathrm{d}x' \sum_{a'} |\langle x'|a'\rangle|^2 \exp\frac{-iE_{a'}t}{\hbar} \\
&= \sum_{a'} \int \mathrm{d}x' |\langle x'|a'\rangle|^2 \exp\frac{-iE_{a'}t}{\hbar} \\
&= \sum_{a'} \exp(\frac{-it}{\hbar}E_a')
\end{aligned} \tag{3}$$

这是一个很有趣的观察，我们发现这个积分相当于对各个能量本征态进行求和，得到一个关于 $t$ 的函数，而这很难不让我们想到统计力学中的配分函数。

$$Z(\beta) = \sum_{a'} e^{-\beta E_{a'}} \tag{4}$$

如果我们选择令 $\frac{it}{\hbar} = \beta$（实际上是对 $G(t)$ 进行解析延拓），那么某种程度上我们就可以看到统计力学中的配分函数和量子系统中的传播子冥冥之中有着某种联系。

### 1.2 1D-Ising 模型传递矩阵解法回顾

我们现在已经有这样的基本认识——配分函数实际上可能可以表示成某个量子系统传播子（虚时间演化）求迹的结果，那么我们很好奇，是否可以将简单一维 Ising 模型的配分函数写成某个矩阵求迹的形式？（考虑周期性边界条件 $\sigma_{N+i} = \sigma_i$）

$$\begin{aligned}
\beta H &= -J\sum_{i=1}^{N} \sigma_i\sigma_{i+1} - B\sum_{i=1}^{N}\sigma_i \\
&= -J\sum_{i=1}^{N} \sigma_i\sigma_{i+1} - B(\frac{1}{2}\sigma_1 + \sum_{i=2}^{N}\sigma_i + \frac{1}{2}\sigma_{N+1}) \\
&= -J\sum_{i=1}^{N} \sigma_i\sigma_{i+1} - \frac{1}{2}B\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i + \sigma_{i+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{N}(-J\sigma_i\sigma_{i+1} - \frac{1}{2}B(\sigma_i+\sigma_{i+1}))
\end{aligned} \tag{5}$$

所以配分函数写作：

$$Z_N = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H(\sigma)} = \sum_{\{\sigma\}}\prod_{i=1}^{N} e^{J\sigma_i\sigma_{i+1} + \frac{1}{2}B(\sigma_i+\sigma_{i+1})} \tag{6}$$

我们看到每个乘积项都有两个指标，很难不想定义一个矩阵来方便记号：

$$V(\sigma,\sigma') \equiv \langle\sigma|V|\sigma'\rangle := e^{J\sigma\sigma' + \frac{1}{2}B(\sigma+\sigma')} \tag{7}$$

或者说写得更直接一些：

$$\begin{aligned}
\langle +1|V|+1\rangle &= e^{J+B} \\
\langle -1|V|+1\rangle &= e^{-J} \\
\langle +1|V|-1\rangle &= e^{-J} \\
\langle -1|V|-1\rangle &= e^{J-B}
\end{aligned} \tag{8}$$

那么很显然，配分函数可以写成：

$$Z_N = \sum_{\{\sigma\}} \langle\sigma_1|V|\sigma_2\rangle\langle\sigma_2|V|\sigma_3\rangle...\langle\sigma_N|V|\sigma_{N+1}\rangle \tag{9}$$

利用完备性 $\sum_\sigma |\sigma\rangle\langle\sigma| = \mathbb{I}$ 和周期性 $\sigma_{N+1} = \sigma_1$，有：

$$Z_N = \sum_{\sigma_1} \langle\sigma_1|V^N|\sigma_1\rangle \tag{10}$$

可以看到确实表示成了一个矩阵的求迹。结果在之前的讨论班中已经给出。

我们不禁会想借用传播子的观点来看 $V$ 到底有什么物理意义。V 和那个时间演化算符的地位十分相像，可以进行如下类比：

$$\int \mathrm{d}x' K(x',t;x',0) \Rightarrow \sum_{\sigma_1} \langle\sigma_1|V|\sigma_1\rangle$$

$$\int \mathrm{d}x' K(x'',t;x',0) \Rightarrow \sum_{\sigma_1} \langle\sigma_2|V|\sigma_1\rangle$$

可以看到 $V$ 这个矩阵和传播子的地位相当一致，那我们就给它起个像样的名字吧——传递矩阵。

借用传播子的物理意义，我们也许可以这样理解传递矩阵：用 $\sigma_i$ 的状态变换到 $\sigma_{i+1}$ 上去。这实际上将这个统计系统等价成了一个离散量子系统，这一维的自旋分布的轴就被等价成

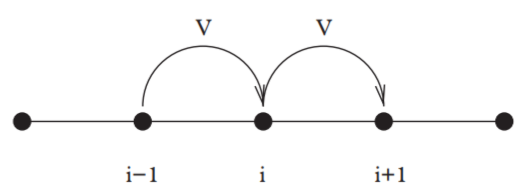


图 1: 传递矩阵物理意义示意图

了这个离散量子系统的时间轴，随之演化，由传递矩阵描述。利用这种观点，你甚至可以去尝试求一下这个等效离散量子系统的哈密顿量（主要参考书上第 57 面就在做这件事）

### 1.3 二维正方晶格的传递矩阵 (Baxter's Approach)

实际上传递矩阵的定义方式不是唯一的，这里我们讨论一种简单的情况。正方晶格（周期性边界条件, 无外场）旋转 45° 来定义。

其实这个想法是自然的，传递矩阵某种意义上表示的是一个态到另一个态的转移，我们尽可能地希望我们考虑的态内部没有相互作用，原本的正方晶格中每行每列之间都是相互关联的，但是对角线上就没有直接关联。

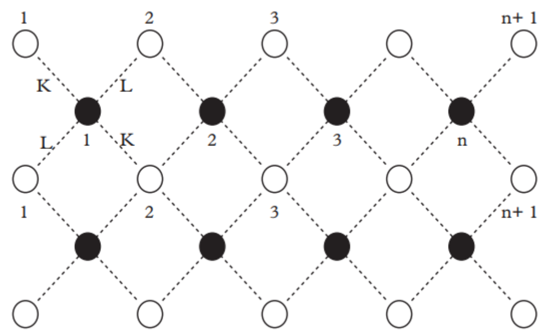


图 2: 旋转 45° 的正方晶格

这里，我们相当于取一个菱形网络，这个网络是方正的，边界用周期性边界条件。在这种定义下，两个相邻的行实际上规格是不同的（分别用黑白表示），格点多或少一个。所以我们定义传递矩阵的时候，白到黑和黑到白会有差异。

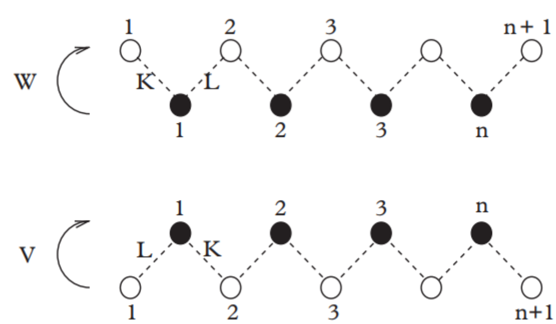


图 3: 两种传递方式示意

我们这里用 $\mu$ 表示某一行可能的某种状态，$\mu'$ 为要传递到的状态（下一行），可以定义出：

$$\begin{aligned} V_{\mu,\mu'}(K,L) &= \exp(K\sum_{i=1}^{n}\sigma_{i+1}\sigma'_i + L\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\sigma'_i) \\ W_{\mu,\mu'}(K,L) &= \exp(K\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\sigma'_i + L\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\sigma'_{i+1}) \end{aligned} \tag{11}$$

那么显然，配分函数可以直接写出：（m 为周期）

$$Z_N = \sum_{\mu_1}\sum_{\mu_2}...\sum_{\mu_m} V_{\mu_1,\mu_2}W_{\mu_2,\mu_3}V_{\mu_3,\mu_4}...W_{\mu_m,\mu_1} \tag{12}$$

实际上一样可以用态的各种可能性定义出矩阵 $V, W$，（以 n 为周期），那么一样直接看出配分函数还是可以描述成总的传递矩阵求迹：

$$Z_N = \mathrm{Tr}\big((VW)^{m/2}\big) \tag{13}$$

注意这里矩阵 $V, W$ 都是 $2^n \times 2^n$ 维的矩阵，很大。求迹最理想的方式就是直接求其本征值然后求和。更严谨地，实际上，$VW$ 是实对称矩阵。

$$\begin{aligned}
(VW)_{\mu,\mu'} &= \sum_{\{\sigma''\}} \exp(K\sum_{i=1}^{n}\sigma_{i+1}\sigma''_i + L\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\sigma''_i)\exp(K\sum_{i=1}^{n}\sigma''_i\sigma'_i + L\sum_{i=1}^{n}\sigma''_i\sigma'_{i+1}) \\
&= \sum_{\{\sigma''\}} \exp\Big(K\sum_{i=1}^{n}\sigma''i(\sigma_{i+1}+\sigma'_i) + L\sum_{i=1}^{n}\sigma''_i(\sigma_i+\sigma'_{i+1})\Big) \\
&= \sum_{\{\sigma''\}} \exp\Big(K\sum_{i=1}^{n}\sigma''i(\sigma_i+\sigma'_i) + L\sum_{i=1}^{n}\sigma''_i(\sigma_i+\sigma'_i)\Big) \\
&= \sum_{\{\sigma''\}} \exp\Big(K\sum_{i=1}^{n}\sigma''i(\sigma'_i+\sigma_i) + L\sum_{i=1}^{n}\sigma''_i(\sigma'_i+\sigma_i)\Big) \\
&= (VW)_{\mu',\mu}
\end{aligned} \tag{14}$$

从线性代数中的结论（实谱定理），我们可以断言这个矩阵有足够的本征矢（正交归一），而且本征值都是实数。这允许我们对本征值比大小。（正定?）如果我们记 $VW$ 本征值为 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, ...\lambda_{2^n}^2$，那么就可以有配分函数：

$$\begin{aligned}
Z_N &= \lambda_1^m + \lambda_2^2 + ... + \lambda_{2^n}^m \\
&= \lambda_{\max}^m \sum_{i=1}^{2^n}(\frac{\lambda_i}{\lambda_{\max}})^m
\end{aligned} \tag{15}$$

实际上，$m \to \infty$，这时除了最大的本征值每一项都应该趋近于 0。于是我们取近似：

$$Z_N \approx \lambda_{\max}^m \tag{16}$$

这个配分函数的形式已经和之前我们在一维中的考虑在形式上已经很接近了。实际上我们还需要对 $n \to \infty$ 讨论，接下来我们为这些讨论做一些精巧的数学铺垫。

### 1.4 传递矩阵的交换性（对易性）

显然，传递矩阵由两个耦合参量 $K, L$ 确定，这里考虑的问题是两个具有不同耦合参量传递矩阵在上面时候是可交换的？

考虑 $V(K,L)W(K',L')$，我们想知道在什么情况下有 $V(K,L)W(K',L') = V(K',L')W(K,L)$。这里其实我们知道 $V$ 和 $W$ 在我们考虑的系统中其实差别不大。

我们直接写出矩阵具体元素看看：

$$\begin{aligned}
\big(V(K,L)W(K',L')\big)_{\mu,\mu'} &= \sum_{\{\sigma''\}} \exp(K\sum_{i=1}^{n}\sigma_{i+1}\sigma_i'' + L\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\sigma_i'' + K'\sum_{i=1}^{n}\sigma_i''\sigma_i' + L'\sum_{i=1}^{n}\sigma_i''\sigma_{i+1}') \\
&= \sum_{\{\sigma''\}}\prod_{i=1}^{n}\exp\sigma_i''\big(K\sigma_{i+1} + L\sigma_i + K'\sigma_i + L'\sigma_{i+1}'\big) \\
&= \prod_{i=1}^{n}\sum_{\sigma_i''=\pm1}\exp\sigma_i''\big(K\sigma_{i+1} + L\sigma_i + K'\sigma_i + L'\sigma_{i+1}'\big) \\
&= \prod_{i=1}^{n} 2\cosh(L\sigma_i + K\sigma_{i+1} + K'\sigma_i' + L'\sigma_{i+1}')
\end{aligned} \tag{17}$$

为了简便，我们直接记：

$$X(a,b,c,d) \equiv 2\cosh(La + Kb + K'c + L'd) \tag{18}$$

$$X'(a,b,c,d) \equiv 2\cosh(L'a + K'b + Kc + Ld) \tag{19}$$

现在我们有：

$$\big(V(K,L)W(K',L')\big)_{\mu,\mu'} = \prod_{i=1}^{n} X(\sigma_i,\sigma_{i+1},\sigma_i',\sigma_{i+1}') \tag{20}$$

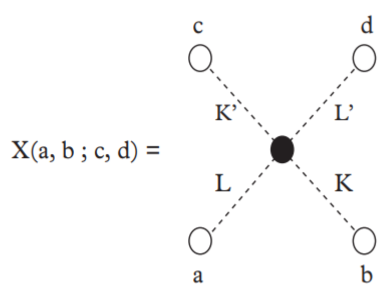


图 4: $X(a,b,c,d)$ 的物理含义

$X(a,b,c,d)$ 实际上描述的就是一个叉字形上 4 个格点之间的传递，我们要用若干个这样的叉字拼成整条网络才给出 $\big(V(K,L)W(K',L')\big)_{\mu,\mu'}$。

仔细想想，这个叉字结构是可以重复拼接给出一条网络的唯一单元吗？显然不是！实际上利用周期性，我们可以在左右两边各补一条等大相反的作用，拼接是可以抵消，一样会给出这样的条状网络。即进行变换

$$X(a,b,c,d)\to e^{Mac}X(a,b,c,d)e^{-Mbd}$$

在这个变换下，$\big(V(K,L)W(K',L')\big)_{\mu,\mu'}$ 保持不变。也就是说这个叉字单元有一定的自由度。

我们要证 $\prod_{i=1}^{n}X(\sigma_i,\sigma_{i+1},\sigma_i',\sigma_{i+1}')=\prod_{i=1}^{n}X'(\sigma_i,\sigma_{i+1},\sigma_i',\sigma_{i+1}')$，在上述观察到的自由度下，我们知道一个充分的条件是，存在一个数字 $M$，使得：

$$X'(a,b,c,d)=e^{Mac}X(a,b,c,d)e^{-Mbd} \tag{21}$$

这个方程可以用所谓的 $Y-\Delta$ 变换的方法求解。首先简单移项：

$$e^{Mac}X(a,b,c,d)=X'(a,b,c,d)e^{Mbd} \tag{22}$$

这其实表示两个图相同：

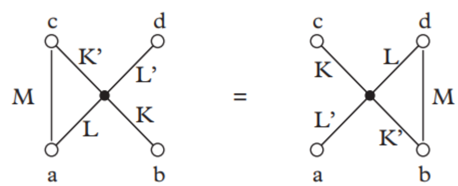


图 5: (22) 式相当于说明这两个图相同

但这两个图其实长得并不一样，不过如果应用 $Y-\Delta$ 变换，就可以化成形状一样的图：这

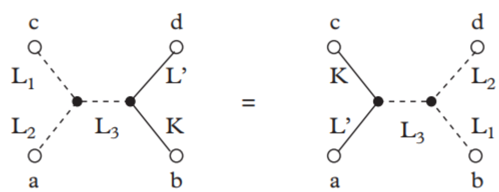


图 6: $Y-\Delta$ 变换后的等效图

两个长得一样的图要相同，那自然是各相互作用一致，我们取：

$$L_1=K\quad L_2=L' \tag{23}$$

这时可以保证两个图相同，也就保证了 (21) 式。

在 Chapter4 中 Section4.4 讨论过 $Y-\Delta$ 变换系数的确定方式，这里我们相当于有：$K_1 = L \quad K_2 = K' \quad K_3 = M$，利用 4.4 中的结论，新系数有 $\sinh 2L_1 \sinh 2K_1 = \sinh 2L_2 \sinh 2K_2 = \sinh 2L_3 \sinh 2K_3$，我们直接得到：

$$\sinh 2K \sinh 2L = \sinh 2K' \sinh 2L' \tag{24}$$

是保证 $M$ 存在的条件，实际上它是多少我们并不关心，我只要知道其存在性就好。

即 (24) 保证了 (21) 式，也就保证了：

$$V(K,L)W(K',L') = V(K',L')W(K,L) \tag{25}$$

在物理意义上，由于周期性边界条件，我们其实知道 $V$ 和 $W$ 之间几乎没有什么差别。可以直接用一个平移算符 $T$（可逆）直接联系起来：

$$W(K,L) = V(K,L)T \tag{26}$$

那么就可以直接得到更加直接的交换性：

$$V(K,L)V(K',L') = V(K',L')V(K,L) \tag{27}$$

即 (24) 式实际上保证了传递矩阵的交换性！

## 1.5 对一个特例的考虑

对于 (24) 式，我们可以取一个很虚无的特殊情况：

$$K' = L + \frac{i\pi}{2} \quad L' = -K \tag{28}$$

很容易验证 (28) 保证了 (24)，在这种情况下，传递矩阵可交换。这时 $X(a,b,c,d)$ 的形式会变得很有趣：（注意，对我们而言 $a,b,c,d = \pm 1$）

$$\begin{aligned} X(a,b,c,d) &= 2\cosh(La + Kb + K'c + L'd) \\ &= 2\cosh(La + Kb + Lc + \frac{i\pi c}{2} - Kd) \\ &= 2ic\sinh(L(a+c) + K(b-d)) \end{aligned} \tag{29}$$

这里用到了 $e^{ic\frac{\pi}{2}} = ci$ 的事实。

实际上毕竟 $a,b,c,d = \pm 1$，所以其实直接用 $a,b$ 来表示就可以表示所有情况了：

$$
\begin{aligned}
X(a,b,a,b) &= 2ia\sinh(2La) \\
&= 2ia^2\sinh(2L) \\
&= 2i\sinh(2L) \\
X(a,b,-a,-b) &= -2ia\sinh(2Kb) \\
&= -2iab\sinh(2K) \\
X(a,b,-a,b) &= 0
\end{aligned} \tag{30}
$$

那么在计算 $\left(V(K,L)W(L+i\frac{\pi}{2},-K)\right)_{\mu,\mu'}$ 时，一旦有 $X(a,b,-a,b)$ 就会变成 0，而利用周期性，我们可以确定一点只要出现 $X(a,b,a,-b)$ 项，就一定会有 $X(a,b,-a,b)$ 项，一样会导致 $\left(V(K,L)W(L+i\frac{\pi}{2},-K\ \right)_{\mu,\mu'}=0$

所以对于非零的 $\left(V(K,L)W(L+i\frac{\pi}{2},-K)\right)_{\mu,\mu'}$ 项，必然只能是两行的态完全相同，或者两行的态完全相反。

对于两行完全相同时 $(\mu'=\mu)$，有：

$$
\left(V(K,L)W(L+i\frac{\pi}{2},-K)\right)_{\mu,\mu'}=(2i\sinh(2L))^n
$$

对于两行完全相反时 $(\mu'=-\mu)$，有：

$$
\left(V(K,L)W(L+i\frac{\pi}{2},-K)\right)_{\mu,\mu'}=(-2i\sinh(2K))^n\prod_{i=1}^{n}(\sigma_i\sigma_{i+1})^n=(-2i\sinh(2K))^n
$$

这里最后一个等号是因为利用周期性边界条件，我们知道其实每个自旋都乘了 $2n$ 遍，结果一点是 1.

因此我们可以得到：

$$
\begin{aligned}
V(K,L)W(L+i\frac{\pi}{2},-K) = {} & (2i\sinh(2L))^n\delta(\sigma_1,\sigma_1')\delta(\sigma_2,\sigma_2')...\delta(\sigma_n,\sigma_n') \\
& +(-2i\sinh(2K))^n\delta(\sigma_1,-\sigma_1')\delta(\sigma_2,-\sigma_2')...\delta(\sigma_n,-\sigma_n')
\end{aligned} \tag{31}
$$

或者说我们定义算符

$$
\mathbb{I}_{\mu,\mu'}:=\delta(\sigma_1,\sigma_1')\delta(\sigma_2,\sigma_2')...\delta(\sigma_n,\sigma_n') \tag{32}
$$

$$
\mathbb{R}_{\mu,\mu'}:=\delta(\sigma_1,-\sigma_1')\delta(\sigma_2,-\sigma_2')...\delta(\sigma_n,-\sigma_n') \tag{33}
$$

其物理意义显然，$\mathbb{I}_{\mu,\mu'}$ 是直接移动两行，$\mathbb{R}_{\mu,\mu'}$ 是移动两行同时取反，则 (31) 写为：

$$
V(K,L)W(L+i\frac{\pi}{2},-K)=(2i\sinh(2L))^n\mathbb{I}_{\mu,\mu'}+(-2i\sinh(2K))^n\mathbb{R}_{\mu,\mu'} \tag{34}
$$

## 1.6 传递矩阵的性质若干

我们再讨论一点点其它普适的传递矩阵的相关性质。实际上我们其实可以讨论传递矩阵的转置，其用物理意义来看很明显，有：

$$V(K,L)^T = W(L,K) \tag{35}$$

以及定义一个算子 $R$，其作用是将目前这一行的态反号。那么考虑到传递矩阵的物理意义，是将一行态转到另一行态，那么 $V(-K,-L)$ 等效于先将 $\mu$ 取反再作用 $V(K,L)$ 或先作用 $V(K,L)$ 得到 $\mu'$ 再取反，直接写出：

$$V(-K,-L) = V(K,L)R = RV(K,L) \tag{36}$$

实际上，由于晶格的对称性，我们可以想到传递矩阵自身应该也有某种周期性。实际上在极限情况下确实有一种很好的周期性。

考虑 $V$ 传递矩阵，令 $p$ 为 $(\sigma_{j+1},\sigma'_j)$ 对自旋相反的对数，$q$ 为 $(\sigma_j,\sigma'_j)$ 对自旋相反的对数。那么 $p+q$ 实际上记录了数列 $\{\sigma_1,\sigma'_1,\sigma_2,\sigma'_2,\sigma_3,...,\sigma_n,\sigma'_n,\sigma_{n+1}=\sigma_1\}$（有机不成环，起码错一半）上符号改变的次数。即本质上就是一个环上放依次放置这些数字，然后考虑两个数字相反的边的数量。用一点简单的组合技巧马上可以发现：$p+q$ 必是是偶数。

利用定义，我们可以直接写出：

$$\begin{aligned}
\big(V(K,L)\big)_{\mu,\mu'} &= \exp(K\sum_{i=1}^{n}\sigma_{i+1}\sigma'_i + L\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\sigma'_i) \\
&= \exp(K((n-p)+(-p))) + L((n-q)+(-q)) \\
&= \exp((n-2p)K + (n-2q)L)
\end{aligned} \tag{37}$$

由于我们考虑的物理问题，我们必须要求在 $n\to+\infty$ 时，这个传递矩阵是收敛的。所以当 $n$ 充分大时，$n$ 的奇偶性对结果是没有影响的，为了方便，我们就直接取 $n$ 为偶数的情况，即令 $n=2s$，（相当于取一个序列的子序列讨论极限，只要认为极限存在，那对子序列的极限的讨论就适用于原序列的极限）。

由于 $p,q$ 都是包含 0 和 $2s$ 之间的数字（奇偶性相同），所以可令 $n-2p=2p'$，$n-2q=2q'$，显然 $p+q+p'+q'=n=2s$，又 $p+q$ 是偶数，则 $p'+q'$ 也是偶数。即 $p'$ 和 $q'$ 的奇偶性一定相同。

$$\begin{aligned}
V(K\pm i\frac{\pi}{2}, L\pm i\frac{\pi}{2}) &= \exp(2p'(K\pm i\frac{\pi}{2}) + 2q'(L\pm i\frac{\pi}{2})) \\
&= \exp(2p'K + 2q'L \pm ip'\pi \pm iq'\pi) \\
&= (-1)^{\pm(p+q)}\exp(2p'K+2q'L) \\
&= \exp(2p'K+2q'L) = V(K,L)
\end{aligned} \tag{38}$$

所以我们得到传递矩阵有关于其两个参数共 2 个方向上的周期性。在这里我们既然观察到其有双周期性，那回忆复分析，我们知道一个典型的非平凡双周期函数是椭圆函数。实际上对于大部分情况下，这个二维传递矩阵的本征值都需要用椭圆函数描述。

这些性质做一个转置自然推至 $W(K,L)$

## 1.7 传递矩阵本征值满足的函数方程

利用传递矩阵的交换性条件 (24)，我们明确地知道交换的矩阵有相同的本征矢，也就是说值 $h$：

$$h^{-1} = \sinh 2K \sinh 2L \tag{39}$$

直接确定了 $V(K,L)$ 的本征矢结构，记其本征矢为 $\{y(h)\}$

同时我们知道 $T,R$ 这两个矩阵总是和 $V(K,L)$ 交换，也总共用本征矢，所以可以令：

$$\begin{cases} V(K,L)y(h) = v(K,L)y(h) \\ Ty(h) = ty(h) \\ Ry(h) = ry(h) \end{cases} \tag{40}$$

实际上我们又由物理意义直接知道 $T^m = \mathbb{I}, R^2 = \mathbb{I}$，所以我们有：

$$\begin{cases} t^m = 1 \\ r^2 = 1 \end{cases} \tag{41}$$

注意到 (34) 式保证了：

$$V(K,L)V(L+i\frac{\pi}{2})T = (2i\sinh(2L))^n\mathbb{I} + (-2i\sinh(2K))^nR \tag{42}$$

其中两个传递矩阵是可交换的也便共用本征矢，直接作用 $y(h)$：

$$v(K,L)v(L+i\frac{\pi}{2})t = (2i\sinh(2L))^n + (-2i\sinh(2K))^nr \tag{43}$$

而实际上，我们记 $V(K,L)W(K,L)$ 作用 $y(h)$ 有 $\lambda(K,L)^2$，自然会有：

$$\lambda(K,L) = v(K,L)\sqrt{t} \tag{44}$$

那么就有：

$$\lambda(K,L)\lambda(L+i\frac{\pi}{2},-K) = (2i\sinh(2L))^n + (-2i\sinh(2K))^nr \tag{45}$$

这就是所谓的本征值满足的函数方程。

## 2 传递矩阵的特征值谱

在有上述精密的数学讨论的加持下，我们可以尝试给出传递矩阵的本征值谱了。这里将展示怎么利用传递矩阵的交换性条件确定其本征值谱。为了凸显出关键的步骤和结构，这里只讨论临界点的情况，非临界点的情况下我们会陷入到复杂的椭圆函数的讨论中，有失重点。

### 2.1 临界点下的特征值谱

所谓临界点，在我们之前的讨论中也提到过了，就是 $h=1$ 的情况，即我们讨论 $K, L$ 特殊取值下传递矩阵的本征值谱。

$$\sinh 2K \sinh 2L = 1 \tag{46}$$

这时，由于物理上耦合参数都是正实数，我们知道这两个因子的取值都是 0 到正无穷。我们可以对这个约束去一个很巧的参数化，让之后的推导能够利用大量复分析中的结论：

$$\begin{cases} \sinh 2K = \tan u \\ \sinh 2L = \cot u \end{cases} \tag{47}$$

考虑到双曲正弦的定义，我们直接可以解出 $e^{\pm 2K}, e^{\pm 2L}$ 用 $u$ 参数化的结果：

$$\begin{cases} e^{2K} = \frac{1+\sin u}{\cos u} \\ e^{-2K} = \frac{1-\sin u}{\cos u} \\ e^{2L} = \frac{1+\cos u}{\sin u} \\ e^{-2L} = \frac{1-\cos u}{\sin u} \end{cases} \tag{48}$$

可以发现 $e^{\pm 2K}, e^{\pm 2L}$ 都是关于 $u$ 的亚纯函数，而且以 $2\pi$ 为周期。

这时很容易验证在 $K' = L + i\frac{\pi}{2} \quad L' = -K$ 的虚无取值下，实际上对应了参数平移 $\frac{pi}{2}$，即 $u + \frac{\pi}{2}$ 为其参数。这样我们可以将 (45) 在这种特殊情况下写成：

$$\lambda(u)\lambda(u+\frac{\pi}{2}) = (2i\cot u)^n + (-2i\tan u)^n r \tag{49}$$

这里直接用 $u$ 参数标记 $(K, L)$。

再考虑传递矩阵中的元素，也可以直接用参数 $u$ 来描述。实际上考虑 (37)，我们可以写出：

$$\begin{aligned} \big(V(K,L)\big)_{\mu,\mu'} &= \exp\big(K(n-p) + (-K)p + L(n-q) + (-L)q\big) \\ &= \frac{(1\pm\sin u)^s}{(\cos u)^s}\frac{(1\pm\cos u)^s}{(\sin u)^s} \\ &\equiv \frac{A(u)}{(\sin u\cos u)^s} \end{aligned} \tag{50}$$

这里 $A(u)$ 是一个关于 $\sin u, \cos u$ 的 $2s$ 次多项式，可以记作：

$$A(u) \equiv e^{-2isu}(a_0 + a_1 e^{iu} + ...a_{2n} e^{4isu}) \tag{51}$$

利用线性代数中的结论，我们其实知道本征值 s 其实可以用某行矩阵元线性组合出来，组合系数无非是本征值分量的比值。这些比值实际上只是 $h$ 的函数。即这些组合系数完全与 $u$ 是无关的!!! 这是一个非常重要的性质。这意味着本征值 $v(K, L)$ 只是若干 (50) 式的线性组合，用 (44) 看出 $\lambda(u)$ 也是如此。

注意到将 $u$ 替换成 $u+\pi$ 时，我们本质上在考虑 $K' = -K \pm i\frac{\pi}{2} \quad L' = -L \pm i\frac{\pi}{2}$ 利用传递矩阵周期性，我们知道 $V(u+\pi) = V(-K, -L) = V(K, L)R$，所以有：

$$V(K, L)Ry(h) = v(u+\pi)y(h) \tag{52}$$

则我们得到本征值的周期性：

$$v(u+\pi) = v(u)r \tag{53}$$

进一步

$$\lambda(u+\pi) = r\lambda(u) \tag{54}$$

实际上 $r^2 = 1 \Rightarrow r = \pm 1$，考虑到本征值的形式 $\lambda(u) = (\sin u \cos u)^{-s} A(u)$，在 $r = 1$ 时用 (54) 看出 $A(u)$ 只有偶数次幂；而在 $r = -1$ 时 $A(u)$ 就只能有奇数次幂。利用三角函数的和角公式，我们相信一定可以将本征值化成：

$$\lambda(u) = \rho(\sin u \cos u)^{-s} \prod_{j=1}^{l} \sin(u - u_j) \tag{55}$$

这样的形式，其中 $\rho, u_j$ 都由组合系数 $a_i$ 确定。在 $r = 1$ 时 $l$ 是偶数，$r = -1$ 时 $l$ 是奇数。实际上为了满足 (51) 形式，必有：

$$\begin{cases} l = 2s & , r = 1 \\ l = 2s - 1 & , r = -1 \end{cases} \tag{56}$$

可以看出，给出本征值谱的关键在于解析地确定 $u_j$

这时我们带回 (49)，就可以得到：

$$\rho^2 \prod_{j=1}^{n} \sin(u - u_j)\cos(u - u_j) = (2i)^{2s}(\cos^{4s} u + r \sin^{4s} u) \tag{57}$$

令 $x = e^{2iu} \quad x_j = e^{2iu_j}$，那么就可以将 (57) 变为：

$$\rho^2 (\frac{1}{4i})^l \prod_{j=1}^{l} \frac{x^2 - x_j^2}{x_j} = (2i)^{-2s} x^{l-2s}((x+1)^{4s} + r(x-1)^{4s}) \tag{58}$$

想知道 $x_j$（本质上就是零点），只要读取 RHS 的零点即可，即求解：

$$(x+1)^{4s} + r(x-1)^{4s} = 0 \tag{59}$$

解这个初等方程，可以有：

$$x_j = \pm i \tan\frac{\theta_j}{2} \tag{60}$$

其中 $\theta_j$ 取值是：($j = 1, 2, ...l$)

$$\theta_j = \begin{cases} \pi(j-\frac{1}{2})/2s, & r = 1 \\ \pi j/2s, & r = -1 \end{cases} \tag{61}$$

所以我们可以直接取对数，得到：

$$u_j = \pm\frac{\pi}{4} - \ln\tan\theta_j \tag{62}$$

由于在 (55) 式中，用 $u_j$ 可以组合出 $2^l$ 可能个本征值。这出现了一点差异，即 $r = \pm 1$ 时组合出来的本征值数量竟然差了两倍?

实际上在 $r = 1$ 时，有一个额外的约束条件，要求了这样组合出来的本征值数量总为 $2^{2s-1}$ 个。

### 2.2 远离临界点情况的概览

览牛魔

## 3 Yang-Baxter 方程和 R 矩阵