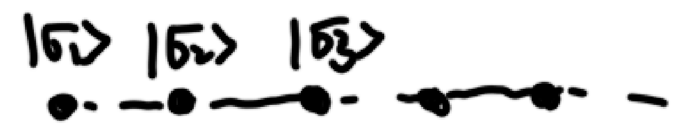
1. 回顾

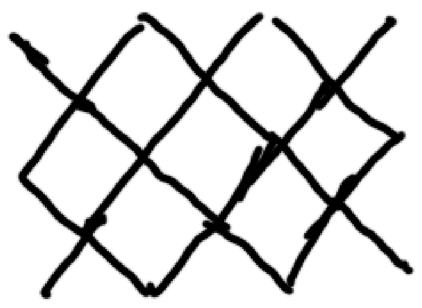
一维伊辛模型的一种解法：$Z=\sum_{\sigma_i} e^{J\sigma_i\sigma_{i+1}} = \sum_{\sigma_i}\langle\sigma_1|e^{J\sigma_1\sigma_2}|\sigma_2\rangle\langle\sigma_2|e^{J\sigma_2\sigma_3}|\sigma_3\rangle\cdots\langle\sigma_n|e^{J\sigma_n\sigma_1}|\sigma_1\rangle$

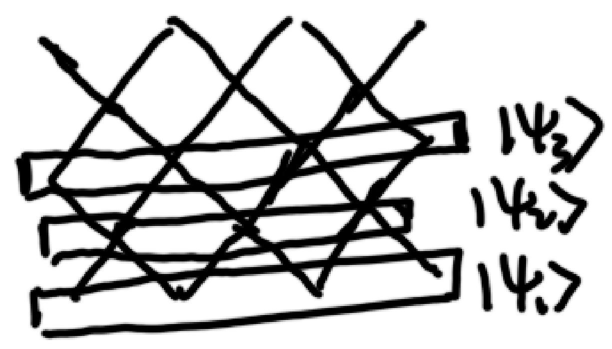
$=\mathrm{tr}\,V^n \qquad V_{ij}=e^{J\sigma_i\sigma_j}$

实际上利用了完备性关系：



传递矩阵：

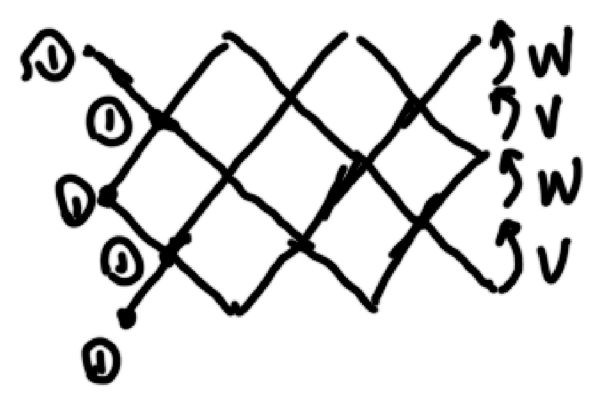




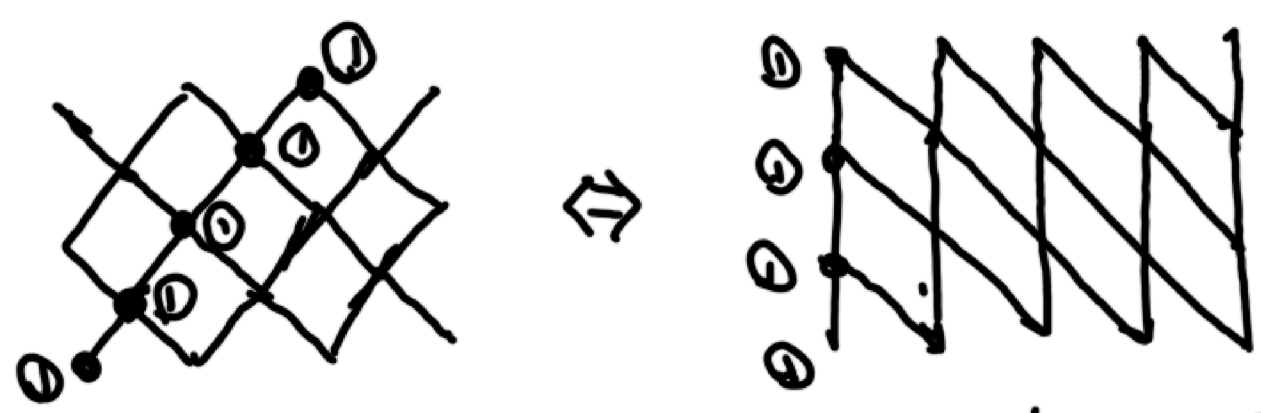
$$Z=\sum_{|\psi_i\rangle}\langle\psi_1|V|\psi_2\rangle\langle\psi_2|W|\psi_3\rangle\langle\psi_3|V|\psi_4\rangle\langle\psi_4|W|\psi_5\rangle\cdots$$

$|\psi_i\rangle$ 可以用一组自旋 $\vec{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\cdots,\sigma_n)$ 标记.

我们这样标记每行的第一个自旋，



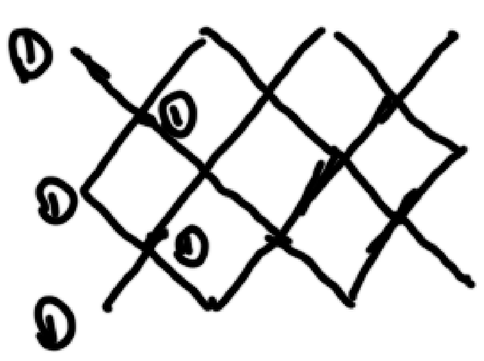
而不是这样：



(这样不是更好吗？甚至不用区分 V, W).

因为这样建立的传递矩阵 $V=\prod_{i=1,2,\cdots} e^{L\sigma_i\sigma_i'+K\sigma_{i+1}\sigma_i'}$ 不能很好的对角化.

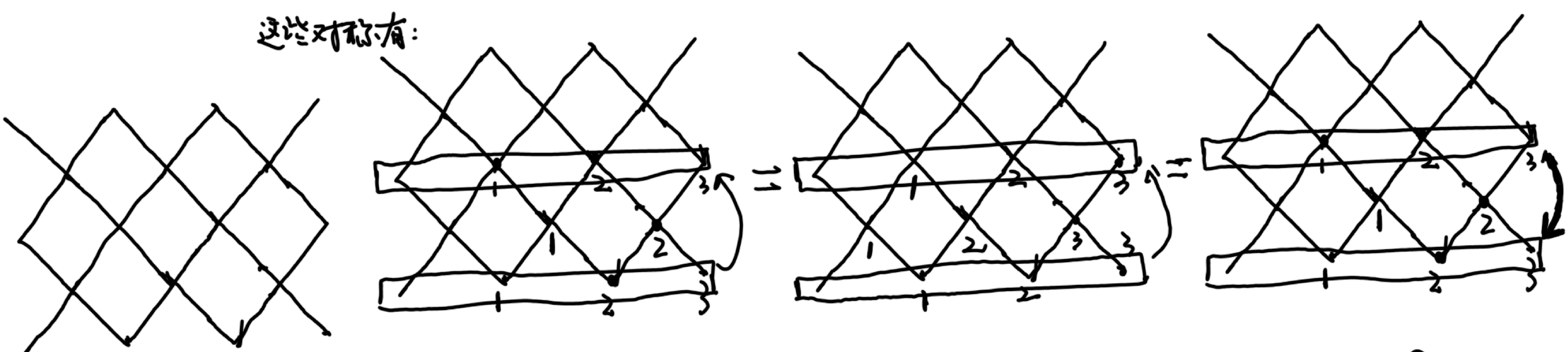
并且破坏了上下反演和左右反演的对称.



而原来的方法建立的传递矩阵 $V=\prod e^{L\sigma_i\sigma_i'+K\sigma_{i+1}\sigma_i'}$, $W=\prod e^{L'\sigma_i\sigma_{i+1}'+K'\sigma_i\sigma_i'}$

虽然可能也不能对角化，但 $V(K,L)W(K',L')$ 在满足一些对称时可以很方便的对角化.

这些对称有：



$V(K,L)W(K',L')=W(K,L)V(K',L')$ ① $V(K,L)W(K',L')=V(K',L')W(K,L)$ ②

并且有内禀的关系 $W(K,L)=V^T(L,K)$, $W(K,L)=V(K,L)T$

T是平移算符，$T=\delta(\sigma_1,\sigma_2')\delta(\sigma_2,\sigma_3')\cdots\delta(\sigma_n,\sigma_1')$

第①个等式比较好理解 可以直接从矩阵元推出来.

第②个等式可以认为具有规范性质，$\{K',L',K,L\}$ 都是局域的量，真正 physical 的量是配分函数.

我们可以对 $\{K',L',K,L\}$ 作规范变换，使变换后的 $\{K,L,K',L'\}$ 满足第②个等式.

之后可以证明当满足第③个等式时 $\sinh 2K \sinh 2L = \sinh 2K' \sinh 2L'$. 这实际上是一种规范!??

$$VW = V(K,L)W(K',L') = \prod e^{\sigma_i'(L\sigma_i + K\sigma_{i+1} + K'\sigma_i' + L'\sigma_{i+1}')} = \prod 2\cosh(L\sigma_i + K\sigma_{i+1} + K'\sigma_i' + L'\sigma_{i+1}')$$

$$\mathrm{tr}\,VW = \sum_{\sigma_i}\prod 2\cosh(L\sigma_i + K\sigma_{i+1} + K'\sigma_i' + L'\sigma_{i+1}')$$

$$= \sum_{\sigma_i} \langle\sigma_1,\sigma_1'|(\quad)|\sigma_2,\sigma_2'\rangle\langle\sigma_2,\sigma_2'|(\quad)|\sigma_3,\sigma_3'\rangle\cdots\langle\sigma_n,\sigma_n'|(\quad)|\sigma_1,\sigma_1'\rangle$$

$= \mathrm{tr}(\quad)^n = f(L,K,K',L')$. 此时对 $\{L,K,K',L'\}$ 我们可以做保持 $f(L,K,K',L')$ 的规范变换.

具有三个自由度!

$\mathrm{tr}(VW)^n = f_n(L,K,K',L')$, 也可以做类似的规范变换.

下面证明 $\sinh 2K \sinh 2L = \sinh 2K' \sinh 2L'$ 时 $V(K,L)W(K',L') = V(K',L')W(K,L)$

(因为 $V(K,L)W(K',L') = V(K',L')W(K,L)$ 具有非常良好的性质，所以后面我们都会把 $\{K,L,K',L'\}$ 规范到 $\sinh 2K \sinh 2L = \sinh 2K' \sinh 2L'$ 上).

$VW = \prod 2\cosh(L\sigma_i + K\sigma_{i+1} + K'\sigma_i' + L'\sigma_{i+1}') = \prod X(\sigma_i, \sigma_{i+1}, \sigma_i', \sigma_{i+1}')$. (定义了函数 $X(a,b,c,d)$)

$X(a,b,c,d)$ 对 VW 来说也是一个局域的函数，也是可以做 gauge transformation (跟之前的规范变换不太一样)的,

$X(a,b,c,d) \to e^{Mac} X(a,b,c,d) e^{-Mbd}$ 不改变 VW 的数值, M 是冗余自由度.

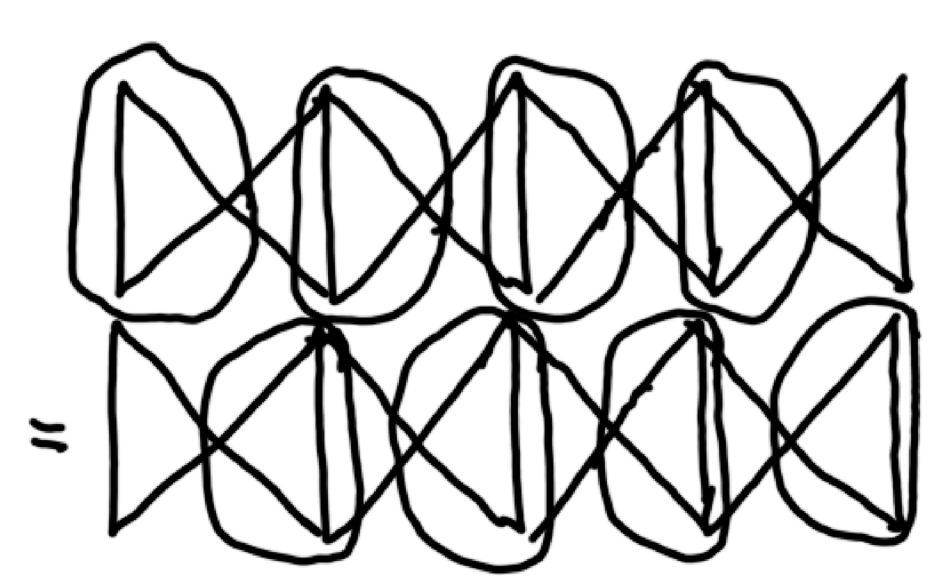
定义 $X'(a,b,c,d) = 2\cosh(L'\sigma_i + K'\sigma_{i+1} + K\sigma_i' + L\sigma_{i+1}')$ (是 $V(K',L')W(K,L)$ 的局域项)

$X(a,b,c,d) = 2\cosh(L\sigma_i + K\sigma_{i+1} + K'\sigma_i' + L'\sigma_{i+1}')$ 是 $V(K,L)W(K',L')$ 的局域项).

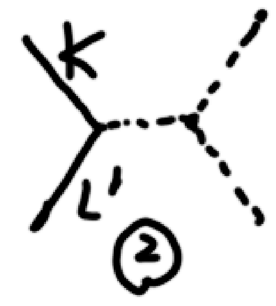
下面证明当 $\sinh 2K \sinh 2L = \sinh 2K' \sinh 2L'$ 时 $X'(a,b,c,d) = e^{Mac} X(a,b,c,d) e^{-Mbd}$.

$\Leftrightarrow X'(a,b,c,d)\, e^{Mbd} = e^{Mac} X(a,b,c,d)$

这个证出来了之前那个命题也证出来了.

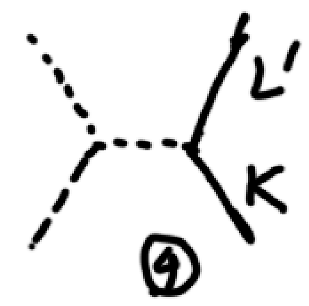


$X'(a,b,c,d)e^{Mbd}$: 

= 

(Δ-Y变换).

$e^{Mac}X(a,b,c,d)=$ 

= 

把①④对应,②③对应,可以得到 $\sinh 2K\sinh 2L=\sinh 2K'\sinh 2L'$.

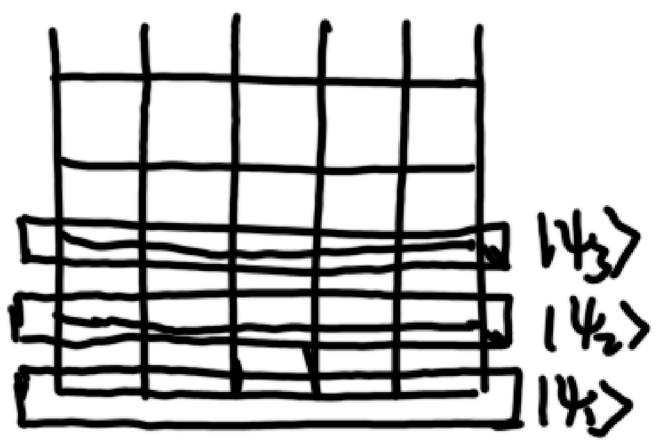
将 $W(K',L')=V(K',L')T$ (T是平移算符)代入 $V(K,L)W(K',L')=V(K',L')W(K,L)$,

并利用 $T^{-1}V(K,L)T=V(K,L)$,得到 $V(K,L)V(K',L')=V(K',L')V(K,L)$.

容易发现当 $K=K'$, $L=L'$ 时. $\langle\mu'|VW|\mu\rangle=\langle\mu|VW|\mu'\rangle$. VW是对称正定的,有正本征值λ;

第二种证法 graphical proof. 仅仅是一种证法.

把倾斜的45°转回去,我们的传递矩阵作用的态如下图所示.



定义 $M(j)=\delta(\sigma_1,\sigma_1')\delta(\sigma_2,\sigma_2')\cdots\delta(\sigma_{j-1},\sigma_{j-1}')\delta(\sigma_{j+1},\sigma_{j+1}')\cdots\delta(\sigma_n,\sigma_n')$

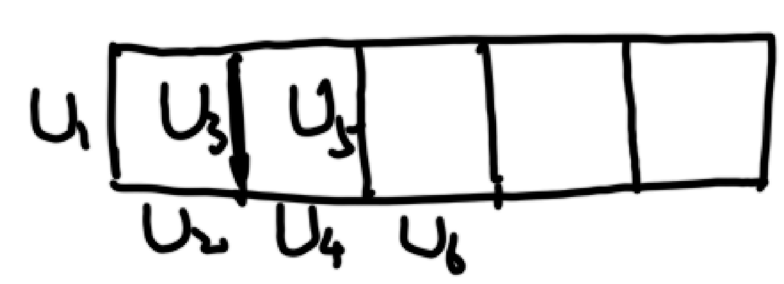
仅仅是为了表示方便.

定义算符 $P_i(K)_{\mu,\mu'}=\exp(K\sigma_i\sigma_{i+1})\delta(\sigma_i,\sigma_i')M(i)$

$$Q_i(L)_{\mu,\mu'}=\exp(L\sigma_i\sigma_i')M(i)$$

$$=\left[e^{L}\delta(\sigma_i,\sigma_i')+e^{-L}\delta(\sigma_i,-\sigma_i')\right]M(i).$$

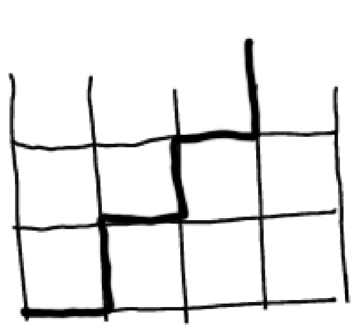
$$U_i(K,L)=\begin{cases}P_j(K) & i=2j\\ Q_j(L) & i=2j-1\end{cases}$$



此时的传递矩阵应该写成 $Q_1Q_2Q_3\cdots Q_nP_1P_2P_3\cdots P_n$.

但这并不是我们要研究的内容.

我们想做的是 graphical proof! 也就是之前的传递矩阵 $V(K,L)$:



← 这是 $V(K,L)$. 显然 $V(K,L)=U_1U_2U_3\cdots U_n$. 我们还要建立相关的等式

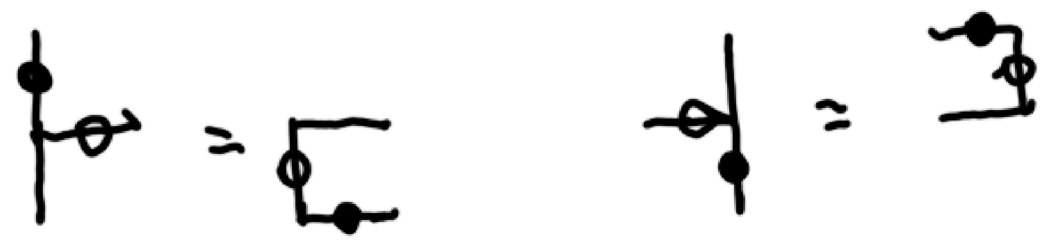
才能完成 graphical proof. 也就是类似对易式一样的东西.

对易式长这样： $[D_j(K), Q_j(L)] = -2\sigma_j\sigma_{j+1}e^{-L}\cosh K\,\delta(\sigma_j,-\sigma_j')\mathcal{U}(j)$

$[D_{j-1}(K), Q_j(L)] = -2\sigma_{j-1}\sigma_j e^{-L}\cosh K\,\delta(\sigma_j,-\sigma_j')\mathcal{U}(j)$.

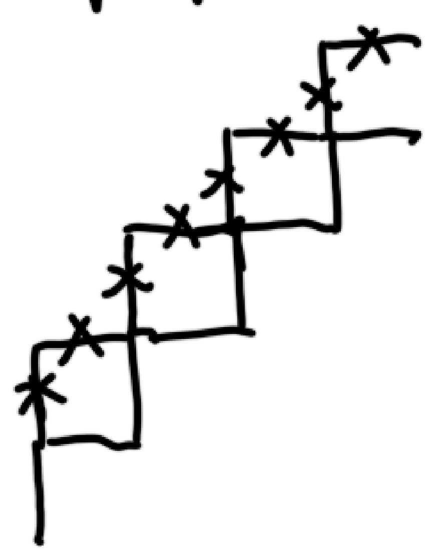
并不是我们想要的那种，我们要的是建立图之间关联的等式.

也就是这种： $U_{i+1}U_i'U_{i+1}'' = U_i''U_{i+1}'U_i$ (当 $\sinh 2K\sinh 2L = \sinh 2K'\sinh 2L' = \sinh 2K''\sinh 2L''$)

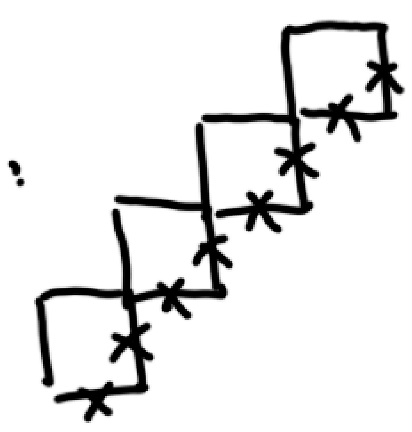
也就是  (—, -o-, -●- 表示 $\{K,L\}$, $\{K',L'\}$, $\{K'',L''\}$ 的 U)

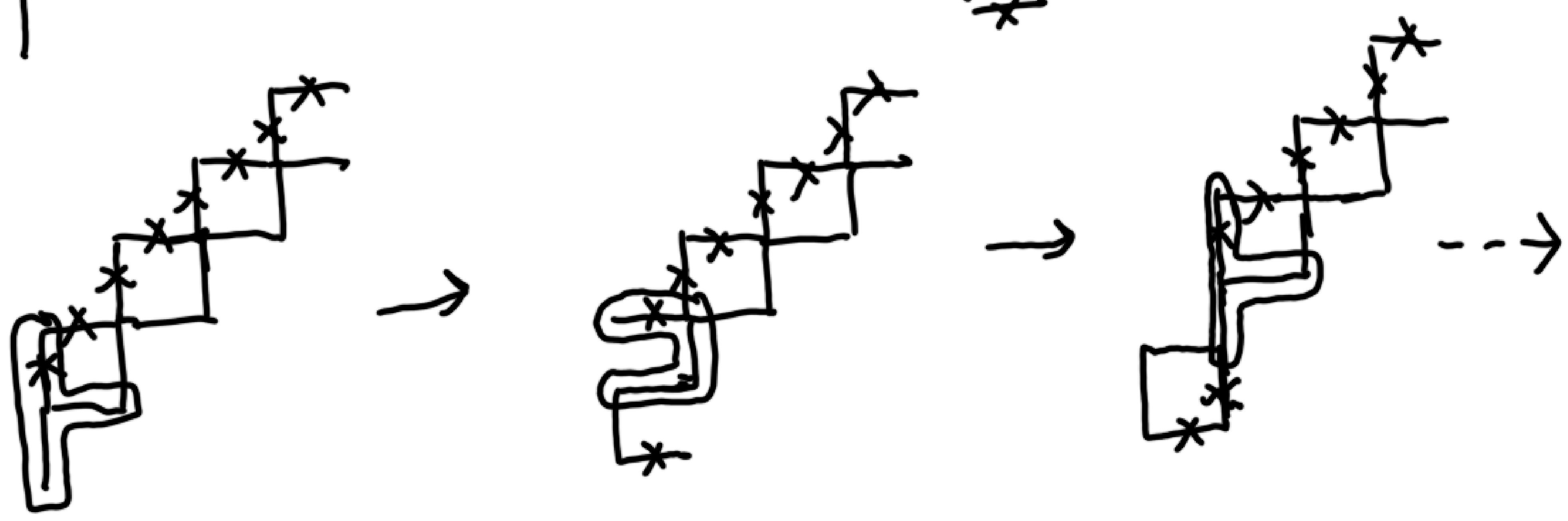
实际上用不到三组 K,L，只有两组.

原本的 VW 是这样的：



可以一步步变换为：





可以证明.

$X(a,b,c,d) = 2\cosh(La+Kb+K'c+L'd)$

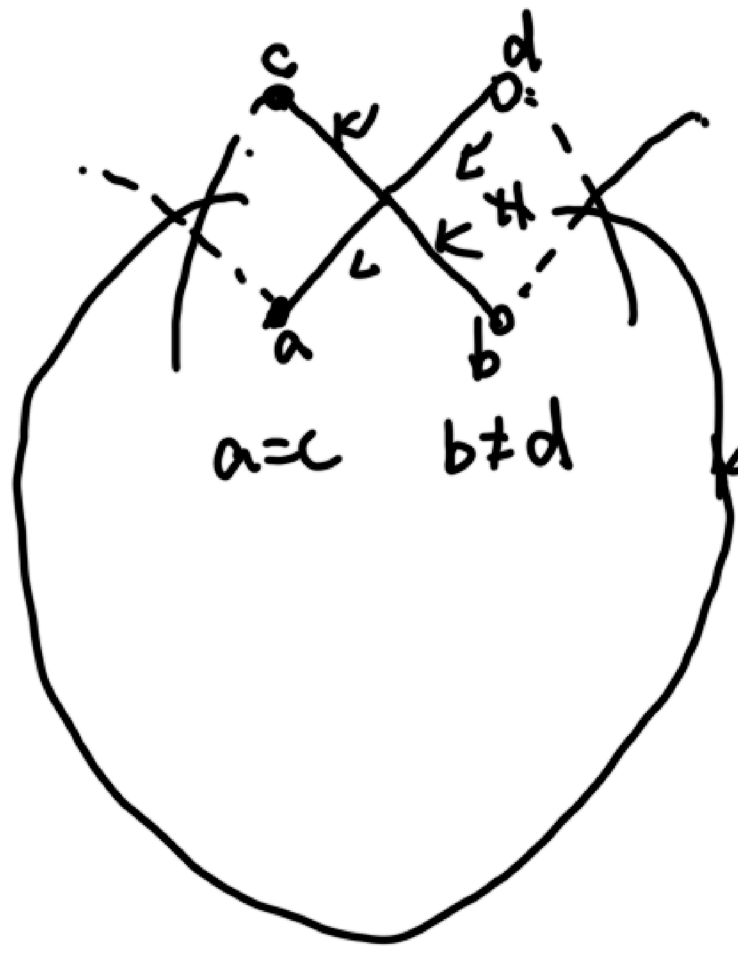
当 $K'=L+\frac{i}{2}\pi$, $L'=-K$ 时, $X(a,b,c,d)$ 具有良好的对称.

$X(a,b,c,d) = 2ic\sinh(L(a+c)+K(b-d))$.

我们希望 X 可以在 $\{a,b,c,d\}$ 取某些值时为零，这样可以对 $V(K,L)$ 作出最大程度的化简.

显然 $a\neq c$, $b=d$ 时 $X=0$

并且如果 $a=c$, $b\neq d$. 一定会有另外的地方出现 $a\neq c$, $b=d$ 的情况:



这一圈中一定有 $a\neq c$, $b=d$ 的情况, 使这个微观态对V没有贡献.

所以真正effective是只有 $X(a=c, b=d)$ 和 $X(a\neq c, b\neq d)$

$\therefore V(K,L)W(L+\frac{i\pi}{2}, -K) = (2i\sinh 2L)^n \delta(\sigma_1,\sigma_1')\delta(\sigma_2,\sigma_2')\cdots\delta(\sigma_n,\sigma_n') + (-2i\sinh 2K)^n \delta(\sigma_1,-\sigma_1')\delta(\sigma_2,-\sigma_2')\cdots\delta(\sigma_n,-\sigma_n')$

$= (2i\sinh 2L)^n I + (-2i\sinh 2K)^n R$. (其中 $R = \delta(\sigma_1,-\sigma_1')\delta(\sigma_2,-\sigma_2')\cdots\delta(\sigma_n,-\sigma_n')$).

R的性质: $V(K,L)R = V(-K,-L)$.

这个公式能直接把特定情况下 $V(K,L)W(K,L)$ 的本征值求出来.

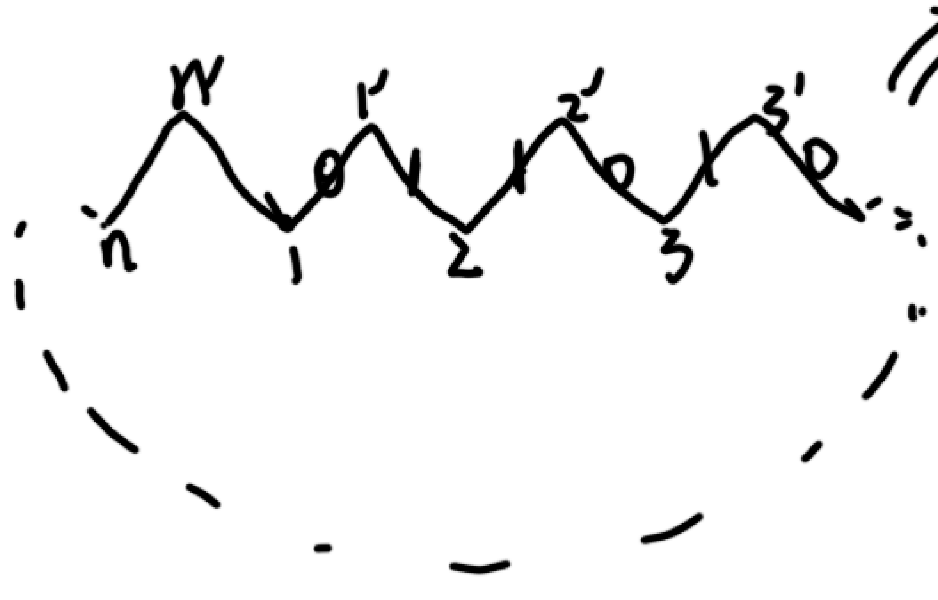
用其他方法也可以得到一个类似的等式. $V(K\pm\frac{i\pi}{2}, L\pm\frac{i\pi}{2}) = V(K,L)(e^{i\pi n})$

V的矩阵元为 $\exp[-(n-2p)K-(n-2q)L]$

p是 $\sigma_i=\sigma_i'$ 的个数, q是 σ_i 和 σ_i' 的个数.

$\exp[-(n-2p)(K+\frac{i\pi}{2})-(n-2q)(L+\frac{i\pi}{2})] = \exp(-i\pi(n-p-q))\cdot(\quad)$.

是可以证明 $p+q$ 是偶数的.



如果斜线两端自旋相同, 将线标记为0, 否则标记为1

$n-p$: 所有左斜线上的数之和

$n-q$: 所有右斜线上的数之和.

考虑1和3'上的自旋是否相等, 只需将1到3'的所有数加起来再mod2即可.

而自己与自己的自旋肯定相等. 所以所有数加起来 $\bmod 2$ 一定是零.

因此 $n-p+n-q$ 是偶数

$p+q$ 是偶数，$V(K+\frac{i\pi}{2}, L+\frac{i\pi}{2}) = e^{i\pi n} V(K,L)$

$n \gg 1$, 总可以取 n 为偶. 此时 $V(K+\frac{i\pi}{2}, L+\frac{i\pi}{2}) = V(K,L)$

为了研究方便, 我们甚至可以取 n 为4的倍数、8的倍数来简化运算.

本征值问题

当 $\sinh 2K \sinh 2L = \sinh 2K' \sinh 2L'$ 时 $V(K,L)V(K',L') = V(K',L')V(K,L)$.

即具有共同本征态

证明本征态仅与 $h = \sinh 2K \sinh 2L$ 有关.

用 $y(h)$ 标记本征态, 当然, 可以加下标 $y_i(h)$.

而 $T^{-1} V(K,L) T = V(K,L)$, $V(-K,-L) = V(K,L)R$ 不改变态

$\therefore V(K,L) y_i(h) = v_i(K,L) y_i(h)$.

$T y_i(h) = t_i y_i(h)$

$R y_i(h) = r_i y_i(h)$. 注意 $V(K,L)$ 不是厄米的.

$W(K,L) = V^T(L,K) = V(K,L)T$

$\therefore v_i(K,L) t_i = v_i(L,K)$.

设 $V(K,L)W(K,L)$ 的本征值为 $\lambda_i(K,L)$ (一定是正的 为什么呢?)

$\lambda_i^2(K,L) = v_i^2(K,L) t_i = v_i(K,L) v_i(L,K)$

$\lambda_i(K,L) = v_i(K,L)\sqrt{t_i}$

如果是 $\lambda_i^2(K,L,K',L') = v_i(K,L) v_i(K',L') t$

就有 $\lambda_i(K,L,K',L') = \sqrt{v_i(K,L) v_i(K',L') t}$

有 $\lambda_i(K \pm \frac{i\pi}{2}, L+\frac{i\pi}{2}) = \lambda_i(K,L)$

$\lambda_i(K,L) \lambda_i(L+\frac{i\pi}{2}, -K) = (2i \sinh 2L)^n + (-2i \sinh 2K)^n r_i$

Critical Point: $\sinh 2L \sinh 2K = 1$

令 $\sinh 2K = \tan u$, $\sinh 2L = \cot u$

则有 $e^{2K} = \frac{1+\sin u}{\cos u}$ $e^{-2K} = \frac{1-\sin u}{\cos u}$、 $e^{2L} = \frac{1+\cos u}{\sin u}$ $e^{-2L} = \frac{1-\cos u}{\sin u}$

$$V_{\mu,\mu'} = \exp[(n-2p)K + (n-2q)L] = e^{(n-p)K} e^{(n-q)L} e^{p(-K)} e^{q(-L)}$$

$$= \left(\frac{1+\sin u}{\cos u}\right)^{\frac{n-p}{2}} \left(\frac{1+\cos u}{\sin u}\right)^{\frac{n-q}{2}} \left(\frac{1-\sin u}{\cos u}\right)^{\frac{p}{2}} \left(\frac{1-\cos u}{\sin u}\right)^{\frac{q}{2}}.$$

$$= \frac{\text{关于}\sin u, \cos u\text{的多项式}}{(\sin u \cos u)^{\frac{n}{2}}}$$ (取 n 是偶数，甚至4的倍数).

记这个多项式为 $A(u)$，$A(u)$ 也可以复数化成关于 $e^{\pm iu}$ 的多项式

即 $A(u) = e^{-inu}(a_0 + a_1 e^{iu} + \dots + a_{2n} e^{2inu})$

下面根据 $V_{\mu,\mu'}$ 的性质确定本征值

$u \to u + \pi$: $K \to -K \pm i\frac{\pi}{2}$, $L \to -L \pm i\frac{\pi}{2}$

$\therefore V(-K,-L) = V(u+\pi)$

而 $V(-K,-L) = V(K,L)R = V(u)R$ $\therefore V(u+\pi) = V(u)R$

$\therefore \lambda_i(u+\pi) = \lambda_i(u) r_i$ ，而 $\lambda_i(u) = V_i(u)\sqrt{t_i}$

$\therefore \lambda_i(u)$ 一定能写成 $\frac{A(u)\text{的特征根}}{(\sin u \cos u)^{\frac{n}{2}}} \cdot \sqrt{t_i}$

而 $A(u) y_i(h) = a_i(u) y_i(h)$. 可以看出 $a_i(u)$ 也是关于 $e^{\pm iu}$ 的多项式.

$$\lambda_i(u) = \frac{\text{Polynomial}(e^{\pm iu})}{(\sin u \cos u)^{\frac{n}{2}}}$$

如果 $r_i = 1$，则 $A(u+\pi) = A(u)$，只有 $\{a_0, a_2, a_4, \cdots a_{2n}\}$ $n+1$ 项保留.

如果 $r_i = -1$，则只有 $\{a_1, a_3, \cdots a_{2n-1}\}$ n 项保留，$\lambda_i(u)$ 也只保留对应项.

设 $\lambda_i(u)\cdot(\sin u\cos u)^{\frac{n}{2}} = g_i(u)$ 也就是 $a_i(u)$ 所 i

那么 $g_i(u) = \sum f_k e^{iku}$ $(k=-n,-n+1,\cdots n)$

利用 $\lambda_i(u)\lambda_i(u+\frac{\pi}{2}) = (2i\sinh 2L)^n + r_i(-2i\sinh 2K)^n = (2i\tan u)^n + r_i(-2i\cot u)^n$

得到 $g_i(u)g_i(u+\frac{\pi}{2}) = (2i\sin^2 u)^n + (-2i\cos^2 u)^n r_i$

让 n 是4的倍数. $g_i(u)g_i(u+\frac{\pi}{2}) = 2^n(\sin^{2n}u + r_i\cos^{2n}u)$

$$\sum_k e^{iku}\left(\sum_{k'} f_{k'}f_{k-k'}e^{ik'\frac{\pi}{2}}\right) = 2^n(\sin^{2n}u + r_i\cos^{2n}u)$$

很麻烦, 不如换一种构造方式: $g_i(u) = \rho\prod_j \sin(u-u_j)$

这样可以避免在公式中出现交叉项.

即 $\rho^2\prod_j \sin(u-u_j)\sin(u+\frac{\pi}{2}-u_j) = \rho^2\prod_j \sin(u-u_j)\cos(u-u_j) = 2^n(\sin^{2n}u + r_i\cos^{2n}u)$.

$$\rho^2\prod_j \frac{1}{4i}\left(e^{2i(u-u_j)} - e^{-2i(u-u_j)}\right) = 2^n\left(\left(\frac{e^{2iu}+e^{-2iu}-2}{4}\right)^n + \left(\frac{e^{2iu}+e^{-2iu}+2}{4}\right)^n\right)$$

我们不需要具体到每个系数相等. 因为 ρ 我们不知道.

我们只需要两边具有相同的根.

$$\therefore \sin^{2n}u_j + r_i\cos^{2n}u_j = 0$$

$$\tan^{2n}u_j = -\frac{1}{r_i}$$

当 $r_i = 1$, $\tan u_j = e^{i\frac{\pi}{n}(k+\frac{1}{2})}$.

当 $r_i = -1$, $\tan u_j = e^{i\frac{\pi}{n}k}$

$$\frac{e^{2iu_j}-1}{e^{2iu_j}+1} = i e^{i\frac{\pi}{n}(k+\frac{1}{2})} \text{ or } i e^{i\frac{\pi}{n}k}$$

可以得到 e^{2iu_j} 是纯虚的, $u_j = \pm\frac{\pi}{4} - \frac{i}{2}\ln\tan\theta_j$

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{\pi}{n}(k+\frac{1}{2}). & r_i = 1 \\ \frac{\pi}{n}k & r_i = -1. \end{cases}$$

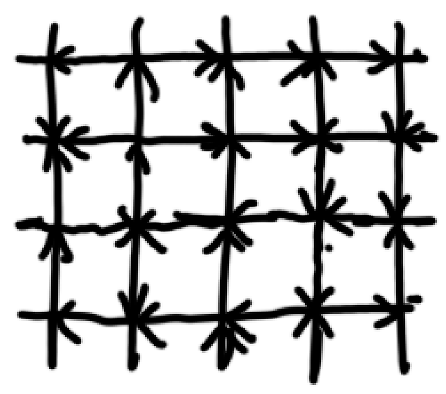
容易发现 $u_j^* = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\tan\theta_j = \pm\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\tan(\frac{\pi}{2}-\theta_j)$

也在 $\{u_j\}$ 中

因此有 $\sum u_i = u_0+u_1+\cdots+u_n = \pi(N+\frac{1}{4}n)$

Yang-Baxter 方程（仅本人理解，有错正常）

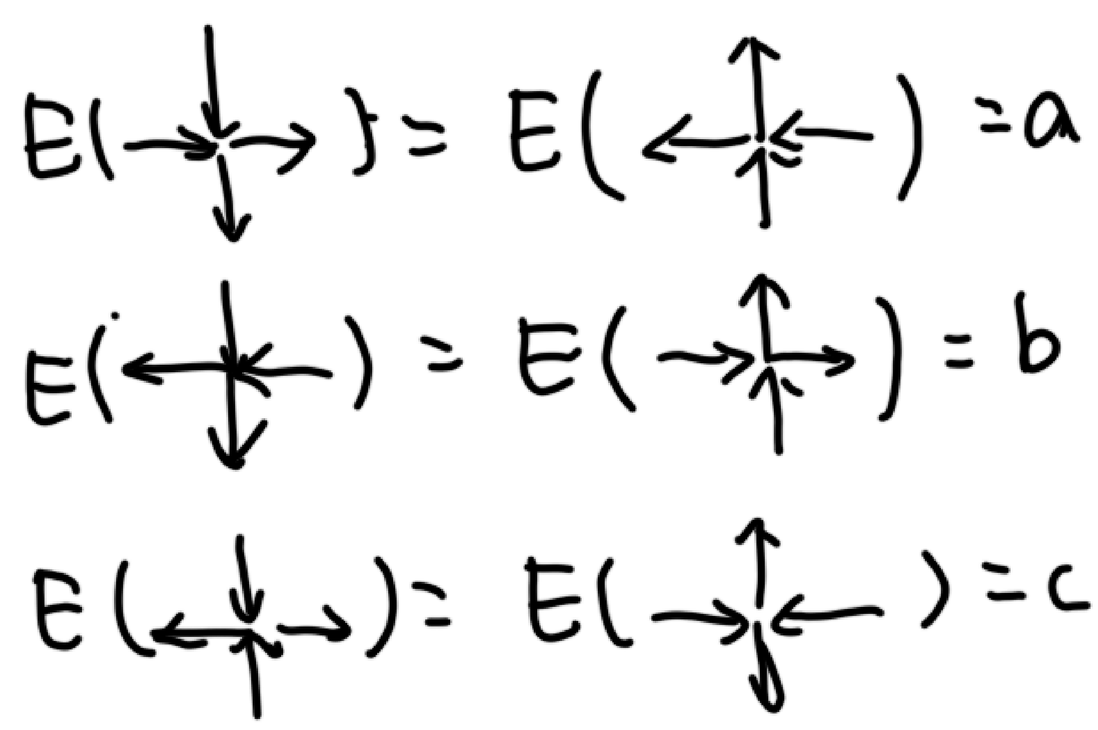
直接讨论其一般形式会比较抽象，考虑一个实例。



Six-vertex model. 六格点模型.

相互作用/键的属性用箭头描述.

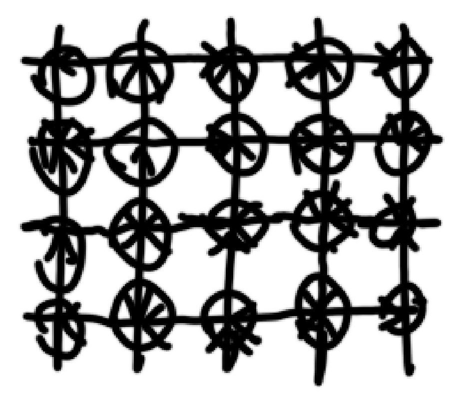
能量是附着在顶点上的.



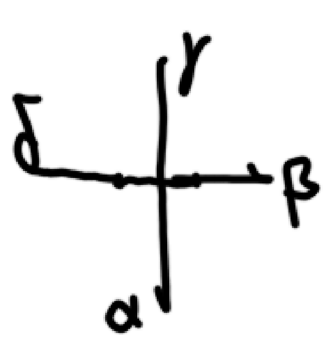
如果考虑旋转对称性甚至有 $a=b$.

我们求配分函数的过程中实际上是对特定的某个 configuration 把每个顶点上的 $e^{-\frac{E}{kT}}$ 乘起来最后对所有 configuration 求和.

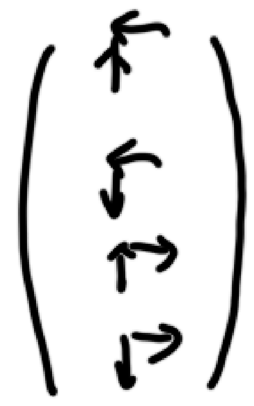
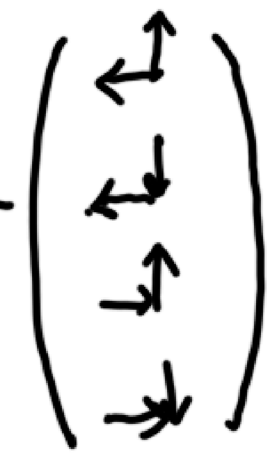
也就是对所有点求和.

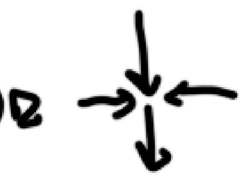


每个顶点我们可以视为四条箭头到 Real 上的一个映射.

也就是  $= e^{-\frac{E(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}{kT}}$

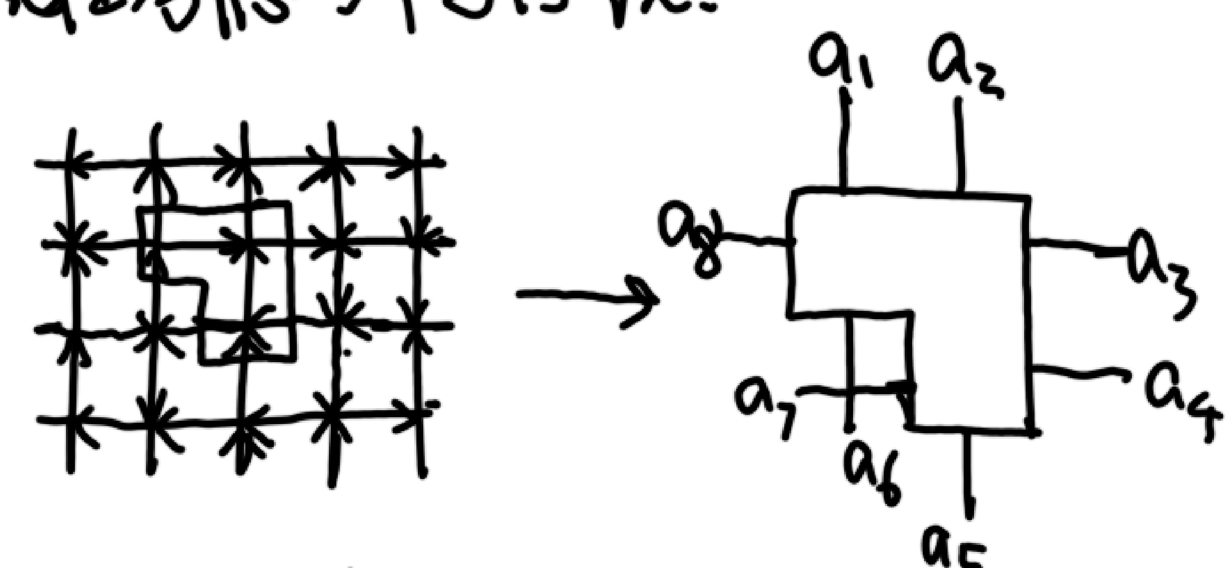
也可以视为某两个元到另两个元的矩阵.

例如 $R((\alpha,\beta)\to(\gamma,\delta))=\begin{pmatrix} e^{-\frac{a}{kT}} & & & \\ & e^{-\frac{b}{kT}} & e^{-\frac{c}{kT}} & \\ & e^{-\frac{c}{kT}} & e^{-\frac{b}{kT}} & \\ & & & e^{-\frac{a}{kT}} \end{pmatrix}$ (基矢是 (), 像是 ()).

为什么要化成矩阵呢? 因为对于 $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ 而言, 有些取法是禁忌的, 比如 

而对于 (α,β), 它的取值是自由的.

现在考虑一个子系统.

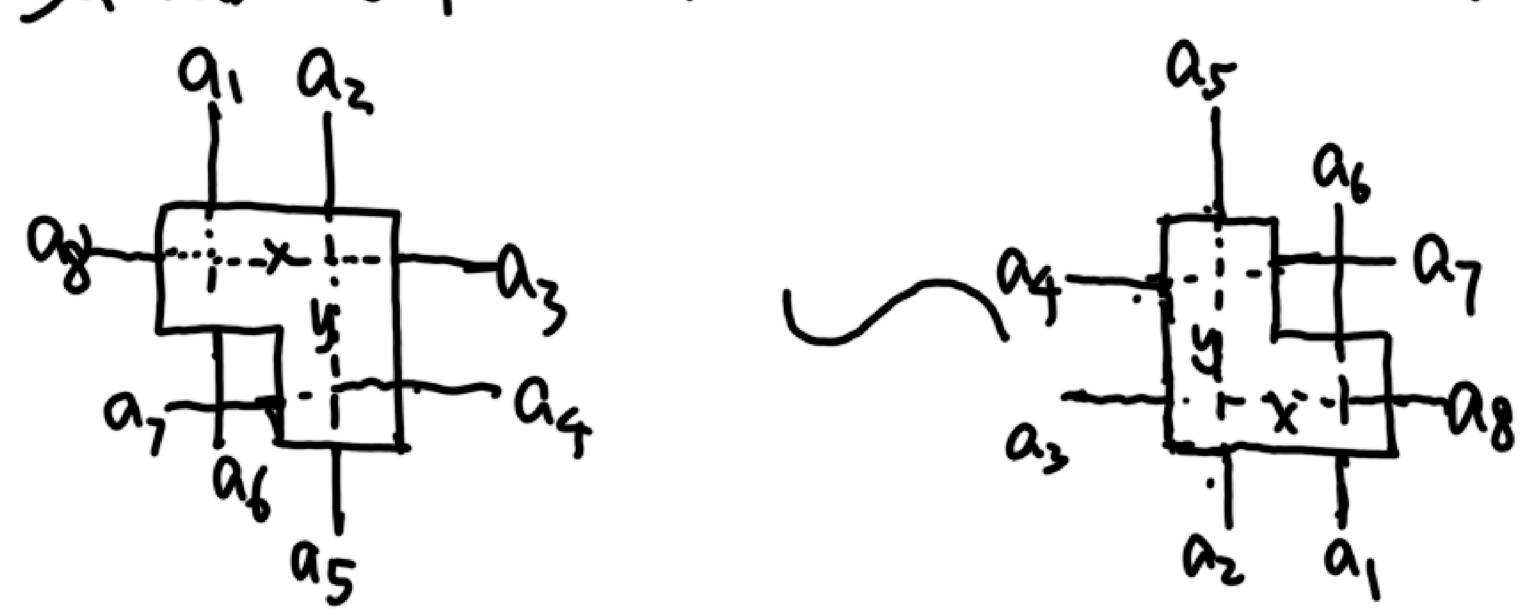


我们考虑这个子系统贡献到整体的配分函数, 也就是八个箭头到Real的映射.

对于一种确定的configuration, 它是确定的.

我们发现能自由选取的 a_i 只有四个.

系统是可以具有各向异性的, 但配分函数没有, 除非环境破坏了:



$$\sum_{xy} R^{a_7 y}_{a_4 a_5} R^{x a_2}_{a_3 y} R^{a_8 a_1}_{x a_6} = \sum_{xy} R^{x a_6}_{a_8 a_1} R^{a_3 y}_{x a_2} R^{a_4 a_5}_{a_7 y}$$

至于参数 p, p' 的部分我暂存疑