高温展开

周期性边界条件伊辛模型配分函数：

$$Z_N(T)=\sum_{\{\sigma\}}e^{-\beta\mathcal{H}}=\sum_{\{\sigma\}}\prod_{i=1}^{N}e^{\mathcal{J}\sigma_i\sigma_{i+1}}$$

其中$\mathcal{J}=\beta j$是温度的函数，j是伊辛模型哈密顿量中相互作用的比例系数；

注意到

$$\sigma_i\sigma_j=-1,1$$

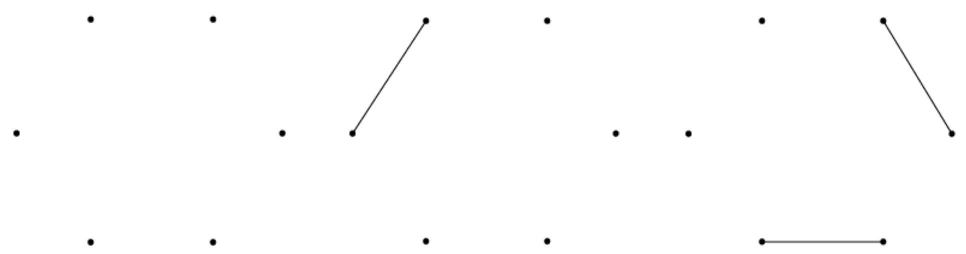
$$e^{\mathcal{J}\sigma_i\sigma_j}=\cosh\mathcal{J}+\sigma_i\sigma_j\sinh\mathcal{J}=\cosh\mathcal{J}\left(1+\sigma_i\sigma_j\tanh\mathcal{J}\right)$$

因此

$$Z_N(T)=\cosh^N\mathcal{J}\sum_{\{\sigma\}}\prod_{i=1}^{N}(1+\sigma_i\sigma_{i+1}\,v),$$

其中$v\equiv\tanh\,\mathcal{J}$.

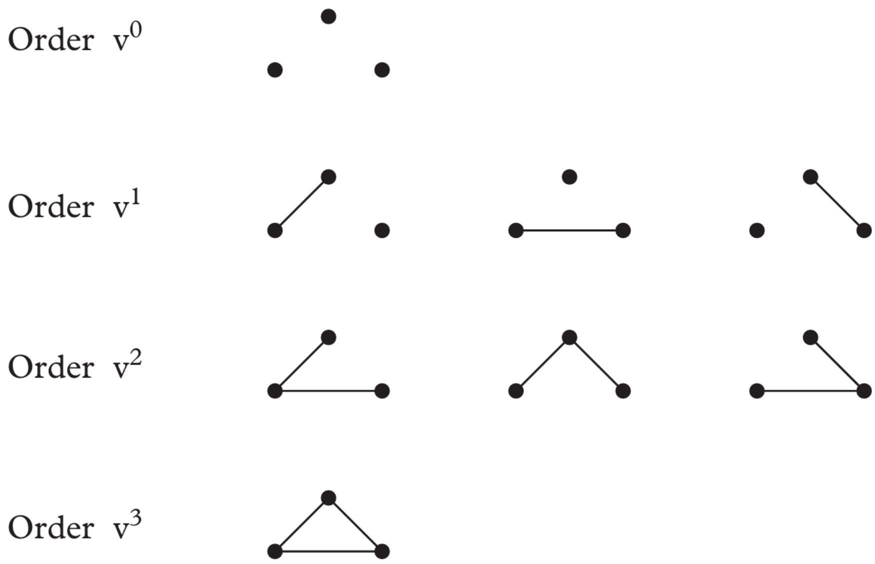
我们的目标是将其中的连乘展开得到一个关于v的多项式，为此我们考察下面的一张图与其展开系数的关系



首先画出伊辛模型中的各个格点，这里由于采用了周期性边界条件，所以画出的点绕了一圈。现在进行连线，每个点只能与相邻的点连接，每连出一幅图就对应了多项式中的一项；边的数目对应了v的幂次，所连的两个点i,j意味着系数中的因子$\sigma_i\sigma_j$.

例如，在三个格点的体系下，我们有多项式和图的对应

$$\prod_{i=1}^{3}(1+\sigma_i\sigma_{i+1}\,v)=(1+v\sigma_1\sigma_2)(1+v\sigma_2\sigma_3)(1+v\sigma_3\sigma_1)=$$
$$1+v(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)+v^2(\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1+\sigma_2\sigma_3\sigma_3\sigma_1)+$$
$$+v^3(\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_3\sigma_3\sigma_1).$$



我们再考虑配分函数求和部分的效果。由于

$$\sum_{\sigma_j=-1}^{1}\sigma_j^{\,l}=\begin{cases}2 & \text{if } l \text{ is even}\\ 0 & \text{if } l \text{ is odd}\end{cases}$$

某一项的系数中只要含有σ_i的奇次幂，该项在求和后就会被消去；这对应于一张含有连了奇数条线的点的图。因此在三个格点的例子中，仅有v^0, v^3项被保留了下来。同理，在周期性边界条件下我们会得到

$$Z_N(T)=\cosh^N\mathcal{J}\,(2^N+2^N v^N)=2^N\,(\cosh^N\mathcal{J}+\sinh^N\mathcal{J}),$$

对于自由边界条件，由于格点首尾不相接，仅有v^0项保留下来，其配分函数为

$$Z_N(T)=2^N\cosh^{N-1}\mathcal{J}.$$

这套方法的好处是具有可扩展性，给定格点和连接规则，我们就能够通过对图的研究获得其配分函数，以此研究更高维或形状更特殊的点阵。

The Potts Model:

波特模型给出两个相邻自旋之间的相互作用为 $-\mathcal{J}\delta(\sigma_i.\sigma_j)$

$$\delta(\sigma,\sigma') = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma = \sigma'; \\ 0 & \text{if } \sigma \neq \sigma', \end{cases}$$

其哈密顿量为

$$\mathcal{H} = -\mathcal{J}\sum_{\langle ij\rangle}\delta(\sigma_i,\sigma_j).$$

其中σ有q种取值。容易发现，这q种取值有S_q的对称性，因为无论它们如何置换，哈密顿量的表达都不会变。

特别地，当$q = 2$的时候，波特模型与伊辛模型结构相同。这启发我们沿用求解伊辛模型方法求解波特模型。递推法和转移矩阵法的操作大差不差，接下来我们重点研究级数展开的方法。

我们有配分函数

$$Z_N = \sum_{\{\sigma\}}\exp\left[\mathcal{J}\sum_{\langle ij\rangle}\delta(\sigma_i,\sigma_j)\right].$$

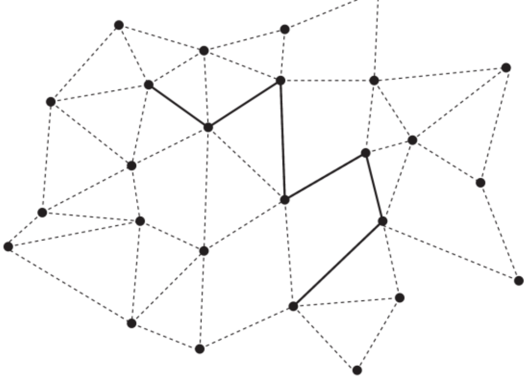
由于

$$e^{x\delta(a,b)} = 1 + (e^x - 1)\,\delta(a,b),$$

在高温下，我们令$v \equiv e^{\mathcal{J}} - 1$，得到

$$Z_N = \sum_{\{\sigma\}}\prod_{\langle ij\rangle}\left[1 + v\,\delta(\sigma_i,\sigma_j)\right].$$

并用同样的方式将多项式的项与图对应起来。



接下来，我们将对$\{\sigma\}$的求和考虑进去。观察一个图$\mathcal{G}$对应的项在求和中的表现。由于δ函数的性质，被线相连的格点上σ的取值必须相同，在求和中它们必须作为一个整体给出一个σ值。因此在图$\mathcal{G}$中，若记将被线相连的格点看成整体后格点的数量为C，连线的数量为l，则图$\mathcal{G}$对应的项将在求和中出现q^C次；配分函数可以写为

$$Z_N = \sum_{\mathcal{G}} q^C v^l.$$

这个式子也定义了非整数q的波特模型。

如果我们考虑低温极限，即$\mathcal{J} \longrightarrow -\infty$的情况，我们有

$$\lim_{x\to-\infty} e^{ax} = \begin{matrix} 0, a=1 \\ 1, a=0 \end{matrix}$$

因此实际上，配分函数变为

$$Z_N = \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\langle ij\rangle} [1-\delta(\sigma_i,\sigma_j)]$$

这本质上就是将我们前面得到配分函数展开式中的v替换为-1

从另一个角度看，Z_N是在数相邻两个格子染不同颜色的方案数。但凡一种染色方案存在两个相邻格子被染上相同颜色，则其乘积为0，不被计数；只要方案中所有相邻格子染上了不同颜色，则其乘积为1，记一次数。

对于一维自由边界情形，配分函数有低温极限

$$\mathcal{P}_N^a(q) = q(q-1)^{N-1}$$

也称染色多项式。它表明一维格子不能被$q=0,1$种颜色染色。通过直接数染色方法我们也能得到同样的表达式。二维的低温极限波特模型与很多著名拓扑问题也息息相关，例如四色定理。

O(n)对称性模型

波特模型是一个具有S_q对称性的相互作用模型，它的每个“自旋”可以在q个离散值中选取，而且这q个离散值之间的任意置换不改变结果。

如果我们的“自旋”可以在n维单位球面上任意选取，即

$$|\vec{S}_i|^2=\sum_{k=1}^{n}(S_i)_k^2=1.$$

并定义其哈密顿量为

$$\mathcal{H}=-\sum_{i=1}^{N-1}\mathcal{J}_i\vec{S}_i\cdot\vec{S}_{i+1},$$

则将构建出一个具有 O(n)对称性的相互作用模型。在这个模型下，空间上的任意正交变换都不影响结果，包括旋转和翻折。

这种情况下，我们对于σ离散取值的求和将化为矢量$\vec{S}$在球面上的积分。因此，配分函数为

$$Z_N(T)=\int d\Omega_1^{(n)}\int d\Omega_2^{(n)}\cdots\int d\Omega_N^{(n)}\exp\left[\sum_{i=1}^{N-1}\mathcal{J}_i\vec{S}_i\cdot\vec{S}_{i+1}\right],$$

其中$d\Omega^{(n)}$是n维立体角元.

一维情形下我们可以写出配分函数的递推公式。考虑在N个自旋内再加入一个自旋$\vec{S}_{N+1}$

$$Z_{N+1}(T)=\left(\int d\Omega_{N+1}^{(n)}\exp\left[\mathcal{J}_N\vec{S}_N\cdot\vec{S}_{N+1}\right]\right)Z_N(T).$$

由于积分 O(n)的对称性，我们总是可以让第n条轴沿新加入自旋$\vec{S}_{N+1}$的方向，

即$\vec{S}_N\cdot\vec{S}_{N+1}=cos\,\theta_{n-1}$，有

$$Z_{N+1}(T)=\left(\Omega(n-1)\int_0^{\pi}d\theta_{n-1}\sin^{n-2}\theta_{n-1}e^{\mathcal{J}_N\cos\theta_{n-1}}\right)Z_N(T).$$

括号内部分不再依赖自旋的取值，记其为$\lambda_1(\mathcal{J}_N)$，有

$$Z_N(T)=[\lambda_1(\mathcal{J})]^{N-1}Z_1$$

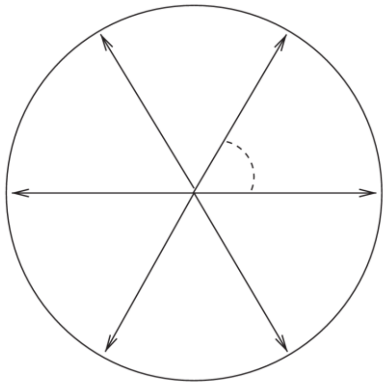
其结果与伊辛模型的配分函数形式上十分相似。事实上该模型在$n=1$时的特殊情况即为伊辛模型。

C_n对称性模型

我们让自旋的取值为等分圆的n个向量，即

$$\vec{S} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

$$\alpha^{(k)} = \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$



其哈密顿量定义为

$$\mathcal{H} = -\mathcal{J}\sum_{\langle ij\rangle}\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j = -\mathcal{J}\sum_{\langle ij\rangle}\cos(\theta_i - \theta_j),$$

则将获得一个具有C_n对称性的相互作用模型。在该模型下，对于自旋所有取值的顺序轮换操作不改变结果。

这个模型与我们之前的三个模型都具有联系。当$n = 2$时，它就是伊辛模型；当$n = 3$时，它等价于$q = 3$的波特模型，只需让 $\mathcal{J} = \frac{2}{3}\mathcal{J}_{Potts}$ 即可使二者的哈密顿量相差常数；当$n \to \infty$时，它将变为 O(2)对称性模型。