Cosmology

1 Introduction

old
- 观星
- MTW 扉页

new.
- 牛顿
- Einstein's GR.

记号：

metric： $(-,+,+,+)$

$\mu, \nu \ldots$ ： $0,1,2,3$

$i, j, \ldots$ ： $1,2,3$

关心的问题： 宇宙起源及演化（大尺度） 解析

结构的形成（小尺度） 数值.

需要什么前置：

Relativity ✓

Quantum Mechanics / QFT

Statistical mechanics ✓

Hydrodynamics ?

参考书：

《Cosmology》 Daniel Baumann

《宇宙学的物理基础》 V. Mukhanov ，（皮石译）

网课：

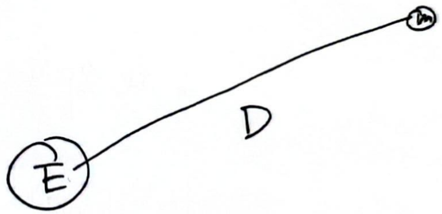
Cosmology （Stanford） Susskind

速通 { 广义相对论 （国科大） 朴云松 — 最后4集.

微广 （北师大） 梁灿彬 ...

1.1 Scales of the universe.

① 地月

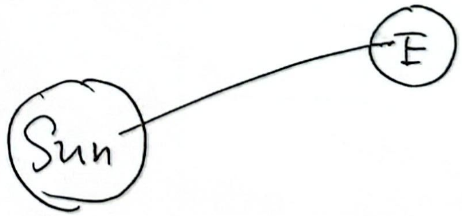


60倍地球半径

4×10^5 km

光走 1.3 s

② 日地

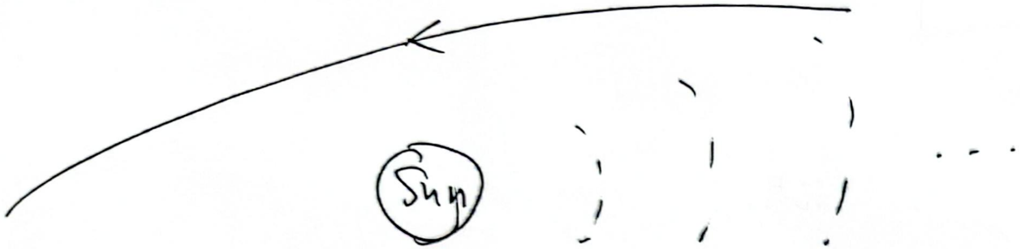


11780 个地球

1.5×10^8 km

光走8分钟.

③ 太阳系



3×10^4 s

10^{10} km

光走12个小时

---

④

4×10^{13} km

$= 4.2$ 光年

---

⑤

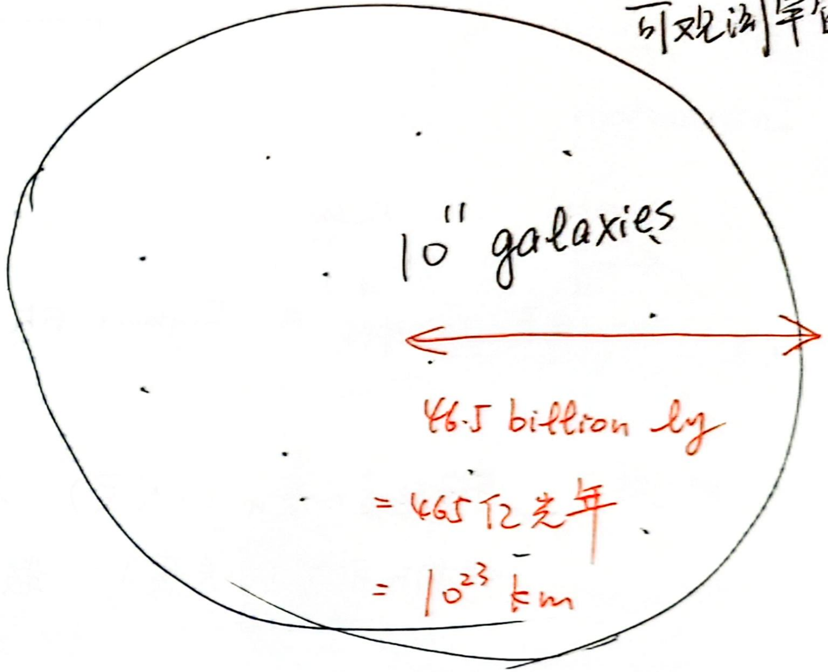
银河

$30\text{kpc} = 30\times3.26\times10^3$ ly.

$= 10$万光年

⑥ 可观测宇宙.

可观测宇宙.



465 > 138 ? 不违背相对论!

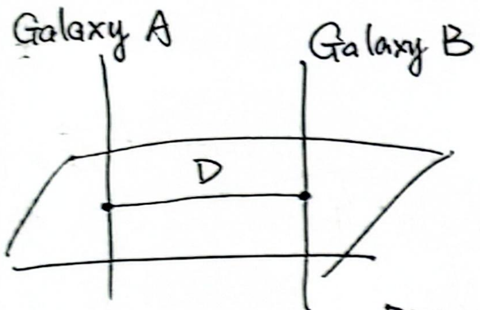
解释: $D_{AB} = a x$ ← 共动坐标 (t, x^i)

$$v_{AB} = \frac{dD}{dt} = \frac{a\,dx}{dt} + \frac{x\,da}{dt}$$

共动系下为0 　　空间的膨胀可超光速.

Wald (1984):

不违反 SR & GR 的教义，因为"不超光速"说的是局域观测时两物体在同一时空点的相对速度，而不是在整体上的两个遥远物体之间的速度.



世界线都是 timelike 的！

$$u(t) = \frac{d(\overbrace{x\,a(t)}^{D(t)})}{dt}$$

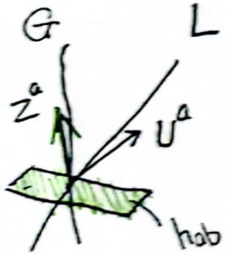
$$= x\dot{a}$$

$$= D\frac{\dot{a}}{a}$$

$$= HD.$$

二者定义不一样.

u^a:



$$u^a := \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \frac{dx^i}{dt}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \frac{dx^i}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}$$

$$= \frac{h^a{}_b U^b}{\gamma}$$

3+1分解:

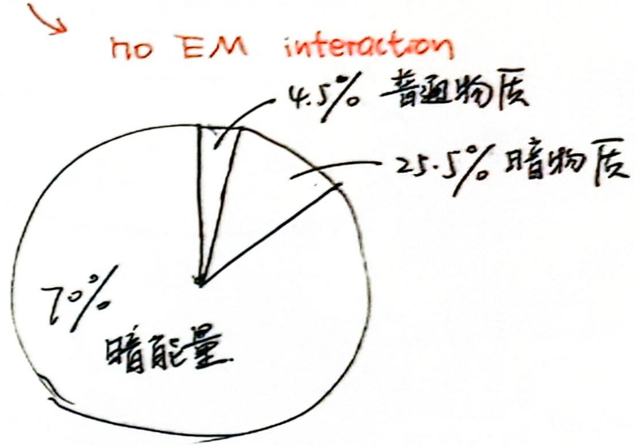
$$U^a = \gamma(Z^a + u^a)$$

不能超光速: $\boxed{\cancel{\sum_i \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2} \quad \cancel{SR:\ u^a u_a < 1 \iff U^a U_a < 0}}$

$$U^a U_a = \gamma^2(Z^a Z_a + u^a u_a) \Rightarrow u^a u_a = 1 - \gamma^{-2} < 1$$

1.2 The invisible universe

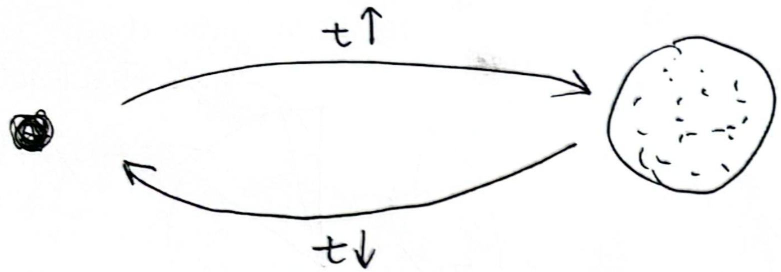
no EM interaction



- dark matter
  - ① 1933 Fritz Zwicky Coma 星系团
  - ② 氢气旋转过快
  - ③ CMB 的引力透镜
  - ④ 引力成团.
- dark energy
  - ① 宇宙年龄
  - ② $\Omega_m \approx 30\%$
  - ③ 近期，宇宙在加速膨胀

DM、DE 类比火神星.

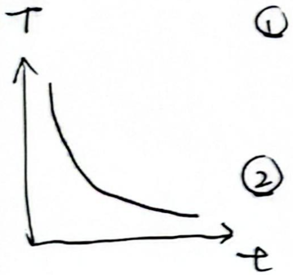
1.3 热大爆炸



早期宇宙(辐射为主)

$$\frac{T}{1\,\mathrm{MeV}} \simeq \left(\frac{t}{1\,\mathrm{sec}}\right)^{-1/2}$$

事件:



① $T > 100$ GeV
SM 中的粒子处于热平衡.

② $T \simeq 100$ GeV (or 10^{15}K), $t \simeq 10^{-11}$s
电弱 symm. 破缺 (电弱相变)

③ $T <$ the mass of a particle
正反粒子湮灭

$T \simeq 150$ MeV, $t \simeq 10^{-5}$s
QCD 相变, 强子

④ $T \simeq 1$MeV, $t \simeq 1$s
中微子退耦

⑤ $T \simeq 100$keV (10^9K), $t \simeq 200$s
核子~~合~~形成

⑥ $T \simeq 0.25$eV, $t \simeq 38 \times 10^4$年
光子退耦(CMB)

0.30eV时, 原子形成

⋮

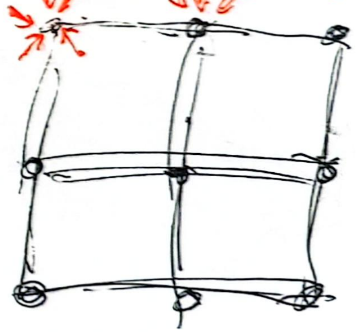
⑦ $T \simeq 2.7$K, $t \simeq 138$亿年
Einstein 出生.

1.4 Growth of Structure

大尺度: 解析
小尺度: 数值.

最早的恒星: Big Bang 后 10^8年
最早的星系: 10^9年

形成恒星,
聚成星系



DM 有网状结构.

1.5 宇宙学 = 考古?

宇宙学研究很难做实验. 主要是观测.
关键任务: 编故事! 自洽

今天的观测结果 ⟶ 推断过去.

CMB是大爆炸的"遗迹".

宇宙学的问题：

① 平直性疑难

② 视界疑难 ⟶ 暴胀模型.

③ 磁单极子

④ 原初扰动

Part I The homogeneous universe

2 膨胀的宇宙

目标：找到、并求解掌控宇宙演化的方程. 困难？

粗粒化

~~均匀且各~~

宇宙在空间上是均匀且各向同的（大尺度上）.

没有中心

2.1 时空与几何

$g_{\mu\nu}$

eg.

$$g_{ab} \xrightarrow{\{x,y,z\}} g_{ij}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_{ab} \xrightarrow{\{r,\theta,\varphi\}} g_{ij}(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

宇宙学原理 ⟶ 存在一系列超曲面 $\{\Sigma_t\}$，每一张超曲面都均匀且各向同.

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\, dl^2$$

为什么可分离，见梁书选读10-1-4

若不是 −1，可重定义 t' 满足 $dt' = \sqrt{g_{00}}\,dt$

Q：没有 g_{0i} 分量？
A：若有 g_{0i}，会给出一个特殊的方向. 不符合"各向同".

均匀且各向同的3维空间 ⟶ 常曲率空间

① $\dim \mathcal{K} = \frac{1}{2}n(n+1)$ 具有最高对称性

killing vector 的集合.

② $R \propto k = 0, \pm 1$

附：Killing vec. field

$v^a \mapsto \{\phi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$

梁书选读 2-2-4

拉回：$\phi_t^* g_{ab} = g_{ab}$

若 ξ^a 是 killing v.f. → $\phi_t: M \to M$ is an isometry

这意味着

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\phi_t^* g_{ab} - g_{ab}) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_{(a}\xi_{b)} = 0 \quad (\text{killing 方程})$$

$g_{ab} \mapsto g_{\mu\nu}$

Claim: $\exists \{x^\mu\}$. s.t. $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^1}$ is Killing

Pf:

$$\left(\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^1}} g\right)_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^1} = 0 \quad ✓$$

↓ 适配坐标系

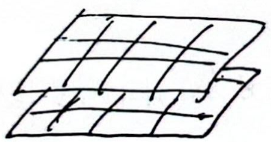
FRW 度规

$k=0,\pm 1$ 下，dl^2的形式

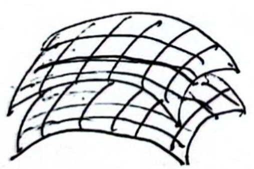
① $k=0 \rightarrow E^3$

3平移+3转动

$$dl^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$$



② $k=1 \rightarrow S^3$ 可嵌入 E^4



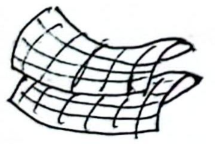
$$\begin{cases} dl^2 = d\vec{x}^2 + du^2 \\ \vec{x}^2 + u^2 = R_0^2 \end{cases}$$

"转动"新理解：绕某轴 ↓ 在某平面

6种"转动"：C_4^2
（隐藏于E^4的对称性中）

③ $k=-1 \rightarrow H^3$ 可嵌入 $\mathbb{R}^{1,3}$

$$\begin{cases} dl^2 = d\vec{x}^2 - du^2 \\ \vec{x}^2 - u^2 = -R_0^2 \end{cases}$$



$6 = 3 + 3$

转动 boost (u类比时间)

总结：

$$\begin{cases} dl^2 = d\vec{x}^2 + k\, du^2 \\ \vec{x}^2 + k u^2 = k R_0^2 \quad (*) \end{cases} \quad (k=\pm 1)$$

$$(*) \rightarrow \vec{x}\cdot d\vec{x} + k u\, du = 0$$

$$\Rightarrow k\, du^2 = k \frac{(\vec{x}\cdot d\vec{x})^2}{k^2 u^2} = \frac{(\vec{x}\cdot d\vec{x})^2}{kR_0^2 - \vec{x}^2}$$

$$\therefore dl^2 = d\vec{x}^2 + k \frac{(\vec{x}\cdot d\vec{x})^2}{R_0^2 - k\vec{x}^2}$$

↙上下同乘k （$k=0$也符合）

若用极坐标，

$$\begin{cases} d\vec{x}^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \\ \vec{x}\cdot d\vec{x} = r\,dr \\ \vec{x}^2 = r^2 \end{cases}$$

则

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2 + k\frac{r^2 dr^2}{R_0^2 - kr^2}$$

$$= \frac{R_0^2}{R_0^2 - kr^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$= \frac{dr^2}{1 - kr^2/R_0^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad \text{for } k = \begin{cases} 0 & E^3 \\ +1 & S^3 \\ -1 & H^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2/R_0^2} + r^2 d\Omega^2\right]$$

(F)RW metric

• 为什么梁书中的RW metric是

$$ds^2=-dt^2+a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2d\Omega^2\right]?$$

因为可以重定义

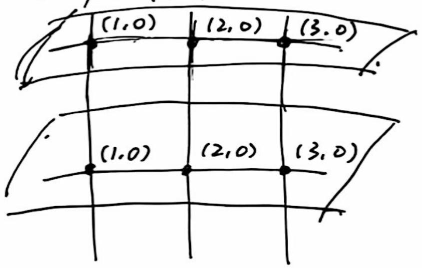
$$\begin{cases}\dfrac{r}{R_0}\to r' & \leftarrow \text{无量纲}\\ a(t)R_0\to a' & \end{cases}$$

$a(t)$ 无量纲，a' 有量纲.

* 相当于书中的λ取为R_0 → $R_0\to\frac{R_0}{\lambda}=1$（梁书）

而Baumann是令 $a(t_0)=1$

共动坐标系



和谁共动？→ Galaxies

$${}^{(3)}D_{AB}=a(t)\,{}^{(3)}\hat{D}_{AB}$$

${}^{(3)}D_{AB}$：用a^2dl^2；$\hat{D}_{AB}$：用dl^2算的

rescaling 下，$\hat{D}_{AB}$可以变，而${}^{(3)}D_{AB}$是不变的. → 物理的距离

补：流形上两点之间的距离.

若g是Lorentz的，则无法定义距离.（总能用类光段连接）

若g正定：① 只有1条geodesic过p、q，就取线长

② 不止一条，就取过p、q的所有线的线长的下确界.

未必geodesic

宇宙的体积

$g_{rr}=a^2/(1-kr^2/R_0^2)$ 有点复杂？

↓

重定义径向：$d\chi=\dfrac{dr}{\sqrt{1-kr^2/R_0^2}}$

$k=0$时，$\chi=r$

$k=1$时，$\chi/R_0=\arcsin\left(\frac{r}{R_0}\right)\Rightarrow r=R_0\sin\left(\frac{\chi}{R_0}\right)$

$k=-1$时，$\chi/R_0=\text{arcsinh}\left(\frac{r}{R_0}\right)\Rightarrow r=R_0\sinh\left(\frac{\chi}{R_0}\right)$

那么

$$ds^2=-dt^2+a^2(t)\left[d\chi^2+S_k^2(\chi)d\Omega^2\right]$$

其中

$$r=S_k(\chi)=\begin{cases}R_0\sin\left(\frac{\chi}{R_0}\right), & k=+1\\ \chi, & k=0\\ R_0\sinh\left(\frac{\chi}{R_0}\right), & k=-1\end{cases}$$

• $k=+1$时体积

S^3：χ/R_0记为ψ，ψ从$0\sim\pi$

θ从$0\sim\pi$，φ从$0\sim2\pi$

$$V=\int\sqrt{\det h}\;d\chi\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\int a^3R_0^3\sin^2\psi\sin\theta\;d\psi\,d\theta\,d\varphi$$

$$=2\pi^2(aR_0)^3$$

aR_0 → 3维球面的半径

超曲面Σ_t在k= 时体积有限

~~动力学~~ 运动学(测地线)

2.2

演员们怎么动

$$\boxed{ds^2 = -dt^2 + a^2\gamma_{ij}dx^i dx^j}$$

geodesic equation:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$P^\alpha \nabla_\alpha P^\mu = 0 \quad \text{(切矢沿曲线平移)}$$

$$\to \nabla_\alpha P^\mu = \partial_\alpha P^\mu + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}P^\beta$$

• 类光粒子

$\gamma(\beta)$

$$\Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\gamma_{ij} \quad \text{(Γ中有2个0的分量为0)}$$

$\mu=0$:

其他分量方程见课书

$$\frac{d}{d\beta}\left(\frac{dt}{d\beta}\right) + \Gamma^0_{ij}\frac{dx^i}{d\beta}\frac{dx^j}{d\beta} = 0$$

$$\frac{dE}{d\beta} + a\dot{a}\gamma_{ij}P^iP^j = 0$$

类光条件: $-E^2 + a^2\gamma_{ij}P^iP^j = 0$

则

$$\frac{dE}{d\beta} + \frac{\dot{a}}{a}E^2 = 0$$

$$\downarrow E = \frac{dt}{d\beta}$$

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{d\beta} + \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\frac{dt}{d\beta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{E} + \frac{da}{a} = 0$$

$$\Rightarrow E \propto a^{-1}$$

书上的"物理直觉"我无法理解.

• 类时粒子

$G(\tau)$

$$P^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$\mu=0$:

$$m\frac{dE}{d\tau} + a\dot{a}\gamma_{ij}P^iP^j = 0$$

四动量:

$$g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = -m^2$$

$$\Rightarrow -E^2 + \underbrace{g_{ij}P^iP^j}_{\text{记为 } p^2} = -m^2 \quad (*)$$

$\mu=0$的方程:

$$\underbrace{m\frac{dt}{d\tau}}_{E}\frac{dE}{dt} + \frac{\dot{a}}{a}p^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{E^2}{2}\right) + \frac{\dot{a}}{a}p^2 = 0$$

由(*):

$$dE^2 = dp^2 + \underbrace{dm^2}_{0}$$

$$\therefore \frac{dp^2}{p^2} + 2\frac{da}{a} = 0$$

$$\Rightarrow d\ln p^2 + \ln a^2 = 0$$

$$\Rightarrow p \propto a^{-1}$$