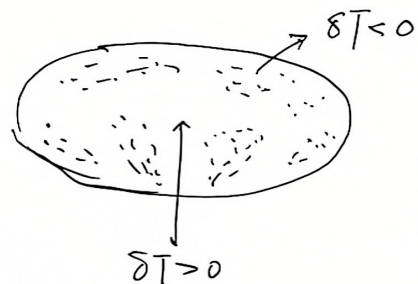


Chap. 7 Cosmic Microwave Background

Q1: CMB 蕴含什么时期的什么信息, 如何解读?

Q2: 理论给出什么样的预言? 和观测的吻合程度如何?

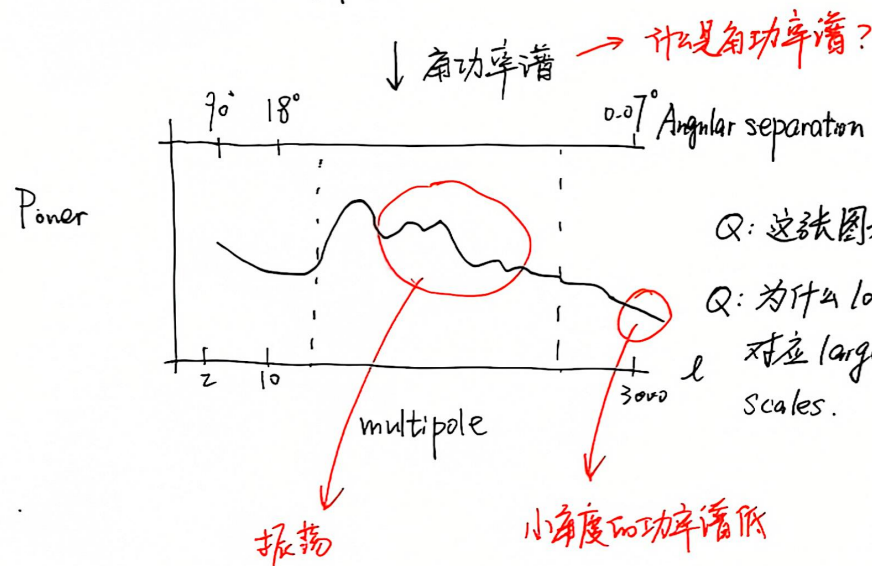
Fig 7.1



背景温度 $T_0 \approx 2.7\text{K}$

Q: 这是什么图?

A: 是温度涨落.



Q: 这张图如何理解

Q: 为什么 low multipole 对应 large angular scales.

本章目标: 理解 CMB 的各向异性, 角功率谱, 找到各向异性背后的物理.

§ 7.1 Anisotropies of the first light

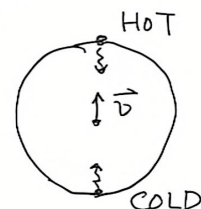
①

Solar system's motion $\rightarrow$ Doppler shift

Prob 7.1: $\frac{\delta T(\hat{n})}{T} = \hat{n} \cdot \vec{v} = v \cos \theta$
 $v \ll c$

相向的辐射: 蓝移, $\delta T > 0$

反向的辐射: 红移, $\delta T < 0$



以此推断太阳系的运动速度 $v \approx 368 \text{ km/s}$

Q: 温度如何引入的?

A: 黑体辐射 $P(\omega) \propto \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$



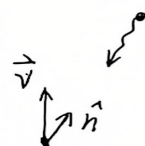
$\lambda_m T = \text{const}$ (维恩位移)

消去 Doppler effect 后, 温度的涨落为 Fig 7.1. 来源有早期宇宙的涨落. 我们要研究该温度的涨落是随机还是有关联.

Q: 当今宇宙的引力红移要不要消去?

A: 这不是各向异性的.

7.1.1 Angular Power Spectrum



$T(\hat{n}) = T_0 + \delta T(\hat{n})$
 $= T_0 (1 + \Theta(\hat{n}))$

$\Theta(\hat{n}) := \frac{\delta T}{T_0}$

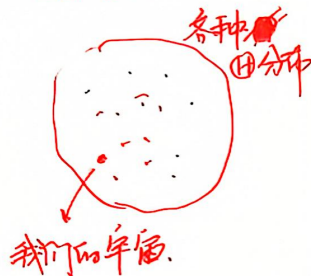
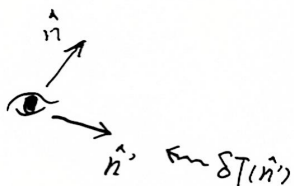
两点关联函数:

$\delta T(\hat{n})$

$$\cos\theta = \hat{n} \cdot \hat{n}'$$

$$C(\theta) = \langle \Theta(\hat{n}) \Theta(\hat{n}') \rangle$$

$\langle \rangle$: Average over an ensemble

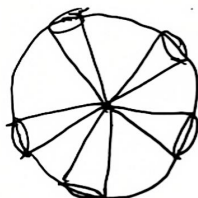


$$\langle \Theta(\hat{n}) \Theta(\hat{n}') \rangle = \int D\Theta \mathcal{P}[\Theta] \Theta(\hat{n}) \Theta(\hat{n}')^*$$

↓
所有可能的分布

Q: 宇宙只是系综中的具体的一种, 怎么算关联函数

A: Estimate the ensemble average by dividing the sky into different patches.



$$\langle \Theta(\hat{n}) \Theta(\hat{n}') \rangle = \frac{\sum \Theta(\hat{n}) \Theta(\hat{n}')^*}{\# \text{ of patches}}$$

大角度分出来就少
小角度分出来就多。

$\Theta(\hat{n})$ 是角度 (θ, φ) 的函数, 可用 $\{Y_{\ell m}\}$ 展开

$$\Theta(\hat{n}) = \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{n})$$

↓
为什么不从 $\ell=1$ 开始?

$$a_{\ell m} = \int d\Omega d\varphi \square Y_{\ell m}^*(\hat{n}) \Theta(\hat{n})$$

就暗含了对 different patches 的平均。

给定一种分布 $\Theta \rightarrow \{a_{\ell m}\}$

$$C(\theta) = \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} Y_{\ell m}(\hat{n}) Y_{\ell' m'}^*(\hat{n}') \langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle$$

Define: $\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = C_{\ell} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$

角功率谱

a consequence of statistical isotropy

代入有

$$C(\theta) = \sum_{\ell m} C_{\ell} Y_{\ell m}(\hat{n}) Y_{\ell m}^*(\hat{n}') = \sum_{\ell} \frac{2\ell+1}{4\pi} C_{\ell} P_{\ell}(\cos\theta)$$

关联函数

↓
角功率谱

C_{ℓ} 和 $C(\theta)$ 所包含的信息是一样多的

利用 P_{ℓ} 的正交归一。

$$C_{\ell} = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) C(\theta) P_{\ell}(\cos\theta)$$

• Cosmic variance

若 $\hat{n} = \hat{n}' \rightarrow \theta = 0 \rightarrow C(0) = \langle |\Theta(\hat{n})|^2 \rangle$ 是方差

$$\begin{aligned} \text{variance} = C(0) &= \sum_{\ell} \frac{2\ell+1}{4\pi} C_{\ell} \\ &\approx \int d(\ln\ell) \frac{(2\ell+1)\ell}{4\pi} C_{\ell} \\ &\approx \int d(\ln\ell) \frac{\ell(\ell+1)}{2\pi} C_{\ell} \end{aligned}$$

大 ℓ 下

每个对数间隔下, 定义

$$\Delta_T^2 = \frac{\ell(\ell+1)}{2\pi} C_{\ell} T_0^2$$

画 CMB 的图常用这个。

cosmic variance: 给定一个 $\ell \rightarrow 2\ell+1$ 个 $a_{\ell m}$. 根据 $C_{\ell} = \langle a_{\ell m} a_{\ell m}^* \rangle$, 这允许给出 $2\ell+1$ 个 C_{ℓ} 的估计值。

estimator

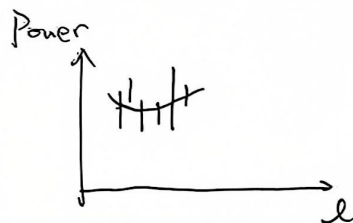
$$\hat{C}_\ell = \frac{1}{2\ell+1} \sum_m |a_{\ell m}|^2 \quad \text{无偏.}$$

虽然是无偏估计, 但有 variance

$$\frac{\Delta C_\ell}{C_\ell} = \frac{\sqrt{\langle (C_\ell - \hat{C}_\ell)^2 \rangle}}{C_\ell} = \sqrt{\frac{2}{2\ell+1}}$$

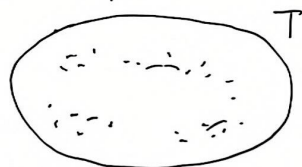
Ex 7.1 (Wick's theorem)

对于较小的 ℓ , $\frac{\Delta C_\ell}{C_\ell}$ 较大. 见 Fig 7.2



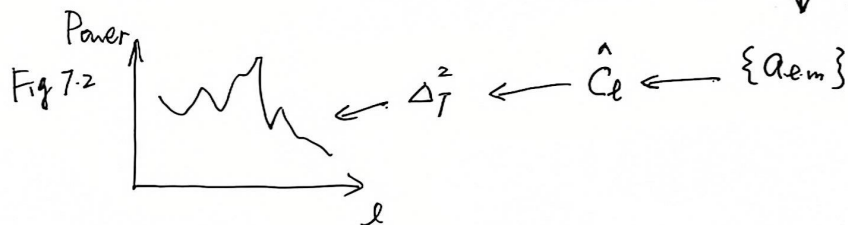
7.1.2 A road map

Fig 7.1



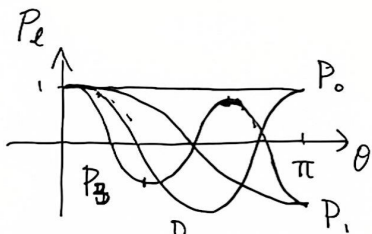
$$\delta T(\hat{n}) \Leftrightarrow \Theta(\hat{n})$$

↓ 用 $Y_{\ell m}$ 展开



回答: ~~为什么~~ low multipole $\leftrightarrow$ large angular scales?

$$\Delta_T^2(\ell) \propto C_\ell = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \underbrace{C(\theta)}_{\text{关联函数}} P_\ell(\cos\theta)$$



P_ℓ 可以提取 $C(\theta)$ 中部分角度的关联程度的信息. ℓ 很大时, P_ℓ 振荡地很厉害 $\Rightarrow C_\ell \rightarrow 0$

③ 如果某个 ℓ 对应的 power Δ_T^2 很大 $\rightarrow C_\ell$ 很大.

那么 $C(\theta) = \sum_\ell \frac{2\ell+1}{4\pi} C_\ell P_\ell(\cos\theta)$ 在 P_ℓ 的极值点处的值就很大. 可见功率谱 $\Delta_T^2(\ell)$ 在某 ℓ 的行为反应了 $C(\theta)$ 在对应的 θ 角的行为.

7.1.2 A road map

CMB 温度涨落背后的物理

$$\Delta_R^2(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} P_R(k) \rightarrow C_\ell = 4\pi \int d(\ln k) \Theta_\ell^2(k) \Delta_R^2(k)$$

其中 $\Theta_\ell(k)$ 称为转移函数

C_ℓ 的背后是原初曲率扰动.

$$\Theta_\ell: \Delta_R^2(k) \xrightarrow{\text{maps to}} C_\ell$$

- ① captures ① the evolution of the fluctuations in the primordial plasma
- ② the free streaming of the photons after decoupling
- ③ the projection of the anisotropies onto the sky.

由于原初功率谱 $P_R(k)$ 没有什么特征, 故转移函数 Θ_ℓ 导致了 CMB 中所有非平凡的结构.

$$R(0, \vec{k}) \xrightarrow[(7.4)]{\text{evolution}} \begin{pmatrix} \delta_\gamma \\ \Psi \\ \nu_b \end{pmatrix} \xrightarrow[(7.3)]{(7.2)} \delta T(\hat{n})$$

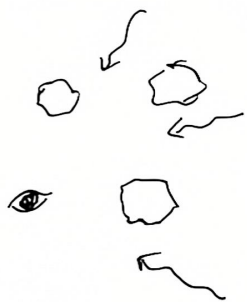
$\rightarrow$ 解耦的时间

§ 7.2: t_* 时刻超曲面的扰动 $\xrightarrow{\text{free streaming}}$ observed δT

§ 7.3: 空间的不均匀 $\rightarrow$ 观测到的角度的涨落 (spatial $\rightarrow$ angular)

§ 7.3-7.5: 初始的曲率扰动 $\rightarrow t_*$ 时刻超曲面上的扰动

§7.2 Photons in a clumpy universe



"Photons travel through the inhomogeneous universe. They gain or lose energy."

光在不均匀的宇宙传播 → 各向异的红/蓝移
温度的各向异性 ←

§7.2.1 Gravitational Redshift

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} = -\Gamma_{\nu\rho}^\mu P^\nu P^\rho \quad (P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda})$$

Newtonian gauge 下

$$ds^2 = a^2(\eta) [-(1+2\Phi)d\eta^2 + (1-2\Psi)\delta_{ij}dx^i dx^j]$$

测地线 $\mu=0$ 的分量:

$$P^0 \leftarrow \frac{d\eta}{d\lambda} \frac{dP^0}{d\eta} = -\Gamma_{\nu\rho}^0 P^\nu P^\rho$$

$$\Rightarrow \frac{dP^0}{d\eta} = -(2\mathcal{H} + \Psi')P^0 - 2(\partial_i \Psi)P^i - [\mathcal{H} - \Phi' - 2\mathcal{H}(\Phi + \Psi)]\delta_{ij} \frac{P^i P^j}{P_0}$$

* 观测时, 观者在局域惯性系 $\{\tilde{x}^\mu\}$ 下, $\tilde{P}^\mu = (E, \tilde{P}^i)$

$$\eta_{\mu\nu} \tilde{P}^\mu \tilde{P}^\nu = g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu$$

$$\Rightarrow -E^2 + \delta_{ij} \tilde{P}^i \tilde{P}^j = g_{00} (P^0)^2 + g_{ij} P^i P^j$$

两个标架的时轴
方向相同

$$\Rightarrow \begin{cases} E = \sqrt{-g_{00}} P^0 \\ P^2 = \delta_{ij} \tilde{P}^i \tilde{P}^j = g_{ij} P^i P^j \end{cases}$$

那么

$$P^0 = \frac{E}{\sqrt{-g_{00}}} = \frac{E}{\sqrt{a^2(1+2\Psi)}} \approx \frac{E}{a} (1-\Psi)$$

$$P^i = \frac{\tilde{P}^i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{E \hat{P}^i}{\sqrt{a^2(1-2\Psi)}} \approx \frac{E}{a} (1+\Psi) \hat{P}^i$$

空间轴的方向
向各向相同。
都

$\hat{P}^i$ 的单一
位置量, 由于时空的分解一样,
故 $\tilde{P}^i$ 和 P^i 的方向
向量是一样的。

将这两个式子代入 $\mu=0$ 的 geodesic eq.

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{d\eta} = -\mathcal{H} + \Phi' - \hat{P}^i \partial_i \Psi \quad (\text{保留至一阶})$$

解读各项含义:

① $-\mathcal{H}$ term: 宇宙膨胀带来的红移.

$$\frac{E'}{E} = -\frac{a'}{a} \Rightarrow E \propto a^{-1}$$

② Φ' term: 抓住了空间上的扰动带来的尺度变换

$$a^2 \delta_{ij} \rightarrow a^2 (1-2\Psi) \delta_{ij}$$

$$\approx a^2 (1-\Psi)^2 \delta_{ij}$$

$$\equiv \tilde{a}^2 \delta_{ij}, \text{ 其中 } \tilde{a} := a(1-\Psi)$$

$$\frac{\tilde{a}'}{\tilde{a}} = \frac{a' - a\Psi' - a\Psi}{a(1-\Psi)}$$

$$= \mathcal{H} - \Psi' + O(\Psi^2)$$

那么 Ψ' term 带来一个宇宙膨胀红移的修正

$$\frac{E'}{E} = -\frac{\tilde{a}'}{\tilde{a}} \Rightarrow E \propto \tilde{a}^{-1} \quad (\text{扰动存在时的修正})$$

③ $\partial_i \Psi$ term

引力红/蓝移. (Ψ 的牛顿势地位)

$$\begin{aligned}\text{故有: } \hat{p}_i \partial_i \psi &= \frac{dx'_i}{d\eta} \partial_i \psi \\ &= \frac{d\psi}{d\eta} - \alpha \psi \\ &= \frac{d\psi}{d\eta} - \psi'\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{E'}{E} + \frac{a'}{a} = \Phi' + \psi' - \frac{d\psi}{d\eta}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\eta}(\ln(aE)) = -\frac{d\psi}{d\eta} + \Phi' + \psi'$$

该方程告诉我们,在不均匀的宇宙中,光子的能量的演化有了超出宇宙膨胀带来红移以外的效应.

7.2.2 Line-of-sight solution (视线)

对(7.23)

$$\frac{d}{d\eta}(\ln(aE)) = -\frac{d\psi}{d\eta} + \Phi' + \psi'$$

积分,可以知道今天的接收到光子能量与光子退耦时的能量之间的关系.

$$\ln(aE)|_0 = \ln(aE)|_* - (\psi_0 - \psi_*) + \int_{\eta_*}^{\eta_0} d\eta (\Phi' + \psi')$$

解耦后,光子自由穿行,保持E-B分布,故 $T \propto E$. 那么,扰动带来的能量 ~~不均匀~~ $\rightarrow$ 温度上的各向异性

$$aT(1 + \frac{\delta T}{T}) \propto aE$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\delta T}{T}|_0 = \frac{\delta T}{T}|_* + \psi_* + \int_{\eta_*}^{\eta_0} d\eta (\psi' + \Phi')$$

丢掉.是因为 ψ_0 没有各向异性的贡献

7.2.3 Fluctuations at last scattering

(5)

(7.27)式:

$$\frac{\delta T}{T}|_0 = \frac{\delta T}{T}|_* + \psi_* + \int_{\eta_*}^{\eta_0} d\eta (\Phi' + \psi')$$

今天的温度涨落 $\frac{\delta T}{T}|_0$. 依赖于脱耦时的温度涨落 $\frac{\delta T}{T}|_*$.

δT_* 的来源有 { 光子密度涨落 δ_r (1)
电子的 bulk velocity 扰动 $\vec{v}_b$. (2)

$$(1): \rho_r \propto T^4 \Rightarrow \frac{\delta T}{T} \supset \frac{1}{4} \delta_r$$

$$(2): \frac{\delta T}{T} \supset \hat{p} \cdot \vec{v}_e = -\hat{n} \cdot \vec{v}_b$$

当时电子和量子束缚,故 $\vec{v}_b = \vec{v}_e$
那么, $\hat{p}$

推导见 Appendix B. 要用到玻尔兹曼方程

$$(\frac{\delta T}{T})_* = (\frac{1}{4} \delta_r - \hat{n} \cdot \vec{v}_b)_*$$

传播途中积累的效应

$$\Rightarrow \frac{\delta T}{T}|_0(\hat{n}) = \underbrace{(\frac{1}{4} \delta_r + \psi)_*}_{\text{SW}} - \underbrace{(\hat{n} \cdot \vec{v}_b)_*}_{\text{Doppler}} + \underbrace{\int_{\eta_*}^{\eta_0} d\eta (\Phi' + \psi')}_{\text{ISW (integrated SW)}}$$

光子数涨落 δ_r 引力红移 ψ

- SW: 含两项. δ_r 是光子涨落的影响, ψ_* 是引力红移效应
- Doppler: 由于量子的速度在超视距上趋于0, 故在大角度上该项并不主导. 此外, Doppler 项的振荡与 SW 项的振荡不同相, 故 Doppler 项的加入会降低谱中峰和谷的对比度.
- ISW: 沿传播路径上引力红移的积累效应. 非零的 ISW 效应需要势 Φ , ψ 随时间. 这个效应主要集中于较晚的时候. ISW 的加入会使峰更高.

本章目标：描述不均匀性如何带来不同方向上温度的关联。

7.3.1 Spatial-to-Angular Projection

前面的章节说过，原初扰动最好在 Fourier space 中研究，各个模式是独立演化的。

暂时忽略 ISW term. 记 $\vec{x}_* = \chi_* \hat{n}$, $\vec{v}_b = i\hat{k} v_b$

$$\Theta(\hat{n}) = \frac{\delta T}{T}(\hat{n})$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\chi_* \hat{n})} [F(\chi_*, \vec{k}) - i(\hat{k} \cdot \hat{n}) G(\chi_*, \vec{k})]$$

$\frac{1}{4} \delta_r + \tilde{\Psi}$

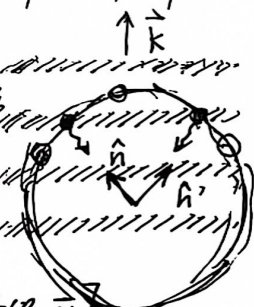


Fig 7.8

傅立叶变换后的。

§6.2.1 中讨论过初始条件。 δ_i , $\tilde{\Psi}_i$, $\vec{k}_i$ 等都是成比例的，且它们随时间的演化都是线性的。那么可以把对 $\vec{k}$ 的依赖放在 R_i 上。即定义 $F_*(k) = F(\chi_*, \vec{k}) / R_i(\vec{k})$, $G_*(k) = G(\chi_*, \vec{k}) / R_i(\vec{k})$

$$\Theta(\hat{n}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\chi_* \hat{n})} [F_*(k) - i(\hat{k} \cdot \hat{n}) G_*(k)] R_i(\vec{k})$$

平面波用球面波展开

$$e^{i\vec{k} \cdot (\chi_* \hat{n})} = \sum_{\ell} i^{\ell} (2\ell+1) j_{\ell}(k\chi_*) P_{\ell}(\hat{k} \cdot \hat{n})$$

球贝塞尔

$$\text{另外 } i(\hat{k} \cdot \hat{n}) e^{i\vec{k} \cdot (\chi_* \hat{n})} = \frac{d}{d(k\chi_*)} e^{i\dots} = \sum_{\ell} i^{\ell} (2\ell+1) j'_{\ell}(k\chi_*) P_{\ell}(\hat{k} \cdot \hat{n})$$

代入有

$$\Theta(\hat{n}) = \sum_{\ell} i^{\ell} (2\ell+1) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Theta_{\ell}(k) R_i(\vec{k}) P_{\ell}(\hat{k} \cdot \hat{n})$$

$$\Theta_{\ell}(k) := F_*(k) j_{\ell}(k\chi_*) - G_*(k) j'_{\ell}(k\chi_*)$$

将 (4) 代入两点关联函数，并利用

$$\langle R_i(\vec{k}) R_i(\vec{k}') \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} \Delta_R^2(k) (2\pi)^3 \delta_D(\vec{k} + \vec{k}')$$

$$P_{\ell}(-\hat{k} \cdot \hat{n}) = (-1)^{\ell} P_{\ell}(\hat{k} \cdot \hat{n})$$

$$\int d\hat{k} P_{\ell}(\hat{k} \cdot \hat{n}) P_{\ell}(\hat{k} \cdot \hat{n}') = \frac{4\pi}{2\ell+1} P_{\ell}(\hat{n} \cdot \hat{n}') \delta_{\ell\ell'}$$

有

$$\text{两点关联函数 } \langle \Theta(\hat{n}) \Theta(\hat{n}') \rangle = \sum_{\ell} \frac{2\ell+1}{4\pi} [4\pi \int d\ln k \Theta_{\ell}^2(k) \Delta_R^2(k)] P_{\ell}(\hat{n} \cdot \hat{n}')$$

与 (7.5): $C(\theta) = \langle \dots \rangle = \sum_{\ell} \frac{2\ell+1}{4\pi} C_{\ell} P_{\ell}(\cos\theta)$ 比较，有

$$C_{\ell} = 4\pi \int d\ln k \boxed{\Theta_{\ell}^2(k)} \Delta_R^2(k)$$

CMB 温度涨落的功率谱。

原初 曲率扰动的功率谱

转移函数 Θ_{ℓ} 即包含了原初扰动到解耦前的演化，又包含了最后的散射界面投影这些信息，从而反映各向异性。

若加上 ISW term,

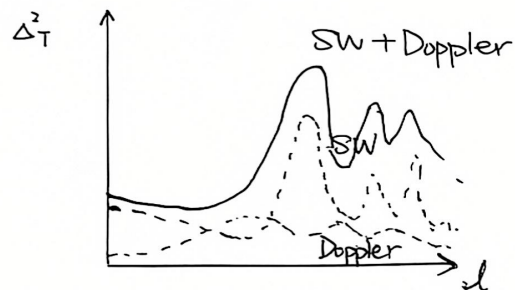
$$\Theta_{\ell}(k) = F_*(k) j_{\ell}(k\chi_*) - G_*(k) j'_{\ell}(k\chi_*) + \int_{\chi_*}^{\eta_0} d\eta (\Theta + \tilde{\Psi}') j_{\ell}(k\chi)$$

其中 $\chi(\eta) = \eta_0 - \eta$.

若把这个代入 $C_{\ell} = \dots \int \dots \Theta_{\ell}^2 \dots$ ，会有 6 项。分别是 SW 的功率谱 C_{ℓ}^{SW} ，Doppler 项 C_{ℓ}^{D} ，ISW 项 C_{ℓ}^{ISW} ，及 3 个交叉项（很小）。

7.3.2 Large scales: SW effect (大 ℓ , 小 l)

Fig 7.7



ℓ 较小的 CMB 谱由超视界的涨落带来, 在 Fig 7.7 中可以发现主要源于 SW term.

$$\text{绝热初始条件} + \text{物质主导} \Rightarrow -2\psi \approx -2\Phi \approx \delta = \delta_m = \frac{3}{4}\delta_r$$

$$\Rightarrow \Theta(\eta) \approx \left(\frac{1}{4}\delta_r + \psi \right)_* = \frac{1}{8}\psi_* = \frac{1}{5}R_i$$

(6.155)

引力红移 ψ 超出了温度固有的涨落. 意味着 $\delta_r > 0$ 的地方 $\delta_r < 0$.
(overdensity) (cold spot)

large scale 上,

$$\Theta_\ell^{SW} = \frac{1}{f} j_\ell(k\chi_*)$$

$$\Rightarrow C_\ell^{SW} = \frac{4\pi}{25} \int_0^\infty d\ln k \Delta_R^2(k) j_\ell^2(k\chi_*)$$

若考虑 power law 形式的 $\Delta_R^2(k) = A_s \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_s-1}$, 则积分为

$$C_\ell^{SW} = \frac{4\pi}{25} A_s (k_0 \chi_*)^{1-n_s} \geq^{n_s-4} \pi \frac{\Gamma(3-n_s) \Gamma(\ell + \frac{n_s-1}{2})}{\Gamma^2(4-\frac{n_s}{2}) \Gamma(\ell+2-\frac{n_s}{2})}$$

特别地, $n_s=1$ 时, $\Delta_R^2 = A_s$ 具有 scale-invariant (标度不变) ⑦

$$\Delta_R^2 = A_s$$

$$\frac{\ell(\ell+1)}{2\pi} C_\ell^{SW} = \frac{A_s}{25} \Rightarrow \Delta_T^{SW} = \frac{A_s}{25} T_0^2$$

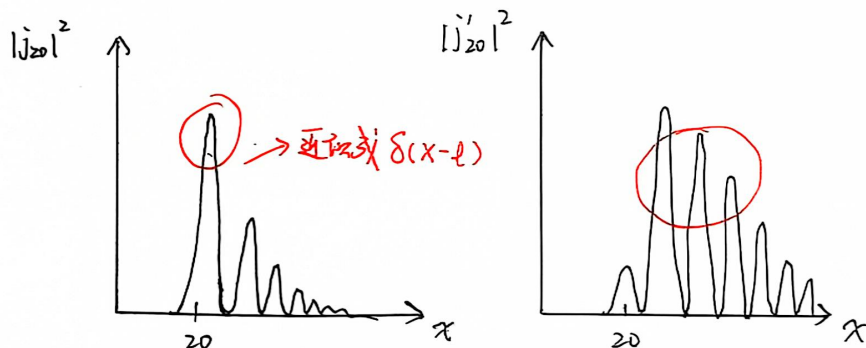
不依赖 ℓ

$$\Leftrightarrow k^3 P_R(k) = \text{const.}$$

7.3.3 Small scales: Sound waves

$\ell > 100$ 的 CMB 谱主要来源于小尺度的涨落, § 7.4 节详细讨论.

大 ℓ 下 j_ℓ 的行为: Fig 7.9



$$\frac{\ell(\ell+1)}{2\pi} C_\ell^{SW} \sim F_*^2(k) \Delta_R^2(k) / k \approx \frac{\ell}{\chi_*}$$

$$\frac{\ell(\ell+1)}{2\pi} C_\ell^D \sim G_*^2(k) \Delta_R^2(k) / k \sim \frac{\ell}{\chi_*}$$

若采用标度不变的初始条件 $\Delta_R^2 = \text{const.}$, 那么功率谱就依赖于转移函数 F_*^2, G_*^2 在 $k = \ell/\chi_*$ 附近的取值. 原本在 k 上的振荡行为就转移到了 ℓ 上.

§ 7.4 Primordial Sound Waves

回顾

$$\frac{\delta T}{T} \Big|_0(\hat{n}) = \left(\frac{1}{4} \delta_r + \psi \right)_* - (\hat{n} \cdot \vec{v}_b)_* + \underbrace{\int_{\eta_*}^{\eta_0} \dots}_{ISW}$$

Q: 那么 η_* 时刻的 δ_r , ψ , $\vec{v}_b$ 我们又该如何了解?

A: 要计算描述扰动的演化的转移函数 @

$$\mathcal{R}(0, \vec{k}) \xrightarrow{\text{transfer function}} \begin{pmatrix} \delta_r \\ \psi \\ v_b \end{pmatrix}_{\eta_*}$$

等等, 在做复杂的计算前, 先对问题的几个尺度做一个定性的分析. 这会告诉我们各个特定的效应何时变得主要.

• Sound horizon (声学视界)

Sound waves can only propagate if $\lambda < \text{horizon}$.

sound horizon: $r_s(\eta) := \int_0^\eta d\tilde{\eta} c_s(\tilde{\eta})$



退耦时,

$$r_{s,*} \approx 145 \text{ Mpc} \quad (\text{Problem 7.2})$$

因此, 只有 $\lambda < r_{s,*} \Leftrightarrow k r_{s,*} > 1$ 的模式是重要的.

又因为, $\ell \sim k r_*$, 且 $r_* \approx 14 \text{ Gpc}$

$\Rightarrow$ Sound waves should affect the CMB spectrum for $\ell > 100$ (结合 Fig 7.7 验证)

• Damping scale (阻尼)

小尺度上光子的扩散 $\rightarrow$ 抹平温度差异 (阻尼效应)

建模: random walk (随机行走)

$$\begin{aligned} \text{step size} &= \text{mean free path} \\ &= l_r = \frac{1}{(a n_e \sigma_T)} \end{aligned}$$

时间间隔 $\Delta\eta$ 内, 碰撞次数

$$N = \frac{\Delta\eta}{l_r}$$

mean-squared distance

$$\langle \Delta r^2 \rangle = N l_r^2 = l_r \Delta\eta$$

积分, 有

$$T_D^2(\eta) = \int_0^\eta d\tilde{\eta} l_r(\tilde{\eta})$$

In problem 7.3,

$$r_{D,*} \approx 7 \text{ Mpc}$$

在 § 7.4.4 中, 对于尺度比 diffusion length 小的涨落模式, 即 $k r_{D,*} > 1$ 的, 它们会有一个指数压低 $e^{-2(k r_{D,*})^2}$.

In harmonic space,

$$\ell_D \sim r_*/r_{D,*} \sim 1400. \Rightarrow \text{CMB 中 } \ell > 1400 \text{ 会有一个指数压低 (Fig 7.7)}$$

7.4.1 Photon - Baryon Dynamics

在

- Hydrodynamic equations

线性阶, Thomson 散射不交换能量, 故连续性方程不变

$$\delta_r' = \frac{4}{3} k v_r + 4\Phi'$$

$$\delta_b' = k v_b + 3\Phi'$$

但动量要交换 $\rightarrow$ 欧拉方程要修正

$$\text{光子: } v_r' + \frac{1}{4} k \delta_r - \frac{2}{3} k \pi_r + k \psi = -\Gamma (v_r - v_b)$$

drag term
(拖曳项)

momentum transfer $\propto$ scattering rate Γ
(详细推导见 Appendix B) difference between v_r & v_b

结论: 光子-重子之间的散射试图让光子与重子一同运动, 即 $v_r \rightarrow v_b$ for large Γ .

重子的欧拉方程:

$$v_b' + 2\ell v_b + k\psi = \frac{\Gamma}{R} (v_r - v_b) \quad (7.59)$$

$$\rightarrow R \equiv \frac{3}{4} \frac{\bar{p}_b}{\bar{\rho}_r}$$

- Tight-coupling limit: Γ is large

此时 $v_b \approx v_r$, 将其代入 (7.59)

$$v_r - v_b = \frac{R}{\Gamma} (v_b' + 2\ell v_b + k\psi)$$

$$\approx \frac{R}{\Gamma} (v_r' + 2\ell v_r + k\psi)$$

将其代入光子的修正的欧拉方程

$$v_r' + \frac{1}{4} k \delta_r - \frac{2}{3} k \pi_r + k \psi = -\Gamma (v_r - v_b)$$

光子各向异性应力, 在 $\approx -R(v_r' + 2\ell v_r + k\psi)$
大 Γ 下会被抑制 (可去掉)

$$\Rightarrow v_r' + \frac{R\ell}{1+R} v_r + \frac{1}{4(1+R)} k \delta_r + k \psi = 0$$

与光子的连续性方程结合, 将 $v_r \rightarrow \delta_r'$, 得到关于 δ_r 的 2-order equation

$$\delta_r'' + \frac{R'}{1+R} \delta_r' + k^2 c_s^2 \delta_r = -\frac{4}{3} k^2 \psi + 4\Phi'' + \frac{4R'}{1+R} \Phi'$$

这里用了 $R\ell = R'$ (因为 $R \propto a$), 还引入了声速 $c_s^2 = [3(1+R)]^{-1}$

7.4.2 High-Frequency Solution

Master equation

$$\delta_r'' + \frac{R'}{1+R} \delta_r' + k^2 c_s^2 \delta_r = -\frac{4}{3} k^2 \psi + 4\Phi'' + \frac{4R'}{1+R} \Phi'$$

没有解析解 $\rightarrow$ 考虑特殊的极限情况.

先考虑高频(短波)极限: $k \gg \mathcal{H}$

solution $f \equiv \{\delta_r, \psi, \Phi\}$

Weinberg: $f = f^{\text{fast}} + f^{\text{slow}}$

The fast modes evolve on a scale $k^{-1} \Rightarrow \partial_\eta f^{\text{fast}} \sim k f^{\text{fast}}$

The slow modes vary on the Hubble scale $\mathcal{H}^{-1} \Rightarrow \partial_\eta f^{\text{slow}} \sim \mathcal{H} f^{\text{slow}}$

fast modes of Φ is sourced by radiation, From the modified Poisson equation, we have

$$-k^2 \Phi^{\text{fast}} = 4\pi G a^2 \bar{\rho}_r \delta_r^{\text{fast}} \approx \mathcal{H}^2 \delta_r^{\text{fast}}$$

那么,

$$\Phi^{\text{fast}} \propto \frac{\mathcal{H}^2}{k^2} \quad \text{在高频极限 } k \gg \mathcal{H} \text{ 下, } \Phi^{\text{fast}} \ll 1$$

因此, fast mode 下, δ_r 满足齐次方程

$$\delta_r'' + \frac{R'}{1+R} \delta_r' + k^2 c_s^2 \delta_r = 0 \quad (\text{fast mode})$$

WKB 近似

$$\text{ansatz } \delta_r = A(\eta) \exp(\pm i k \int_0^\eta c_s(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta})$$

$$\equiv A(\eta) e^{\pm i \varphi(\eta)} \quad \text{在振荡的周期上, } A \text{ 缓变}$$

过程略,

$$A(\eta) \propto (1+R)^{-1/4}$$

$$\Rightarrow \delta_r^{\text{fast}} = (1+R)^{-1/4} (C \cos \varphi + D \sin \varphi)$$

考虑低频: 丢掉 master equation 中所有时间导数项, 则

$$\delta_r^{\text{slow}} = -4(1+R) \psi^{\text{slow}}$$

The full WKB solution (直接相加)

$$\delta_r = (1+R)^{-1/4} [C \cos \varphi + D \sin \varphi] - \underbrace{4(1+R) \psi}_{\substack{\downarrow \\ \text{引力项会 shift} \\ \text{振荡的零点}}}$$

S-W term 的转移函数

$$F_*(k) \equiv \frac{\frac{1}{4} \tilde{\delta}_r(\eta_*, \vec{k}) + \tilde{\psi}(\eta_*, \vec{k})}{\mathcal{R}_i(\vec{k})}$$

$$= \frac{1}{4} (1+R)^{-1/4} \frac{\tilde{C}(\vec{k}) \cos \varphi_* + \tilde{D}(\vec{k}) \sin \varphi_*}{\mathcal{R}_i(\vec{k})}$$

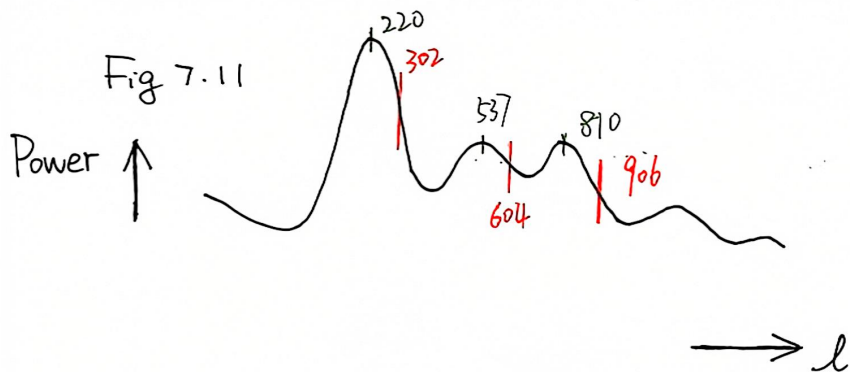
$$- R \frac{\tilde{\psi}(\eta_*, \vec{k})}{\mathcal{R}_i(\vec{k})} \quad (\text{其中 } \varphi_* = k r_{s,*})$$

§7.3.3 中, angular power spectrum $\sim |F_*(k)|^2|_{k \approx 1/\lambda_*}$

$$\Rightarrow \text{peaks of the spectrum: } l_n = n\pi \frac{\eta_*}{r_{s,*}} \approx n\pi \frac{14 \text{ GPC}}{145 \text{ Mpc}} \approx n \times 302$$

$$l_n \approx n \times 302 \rightarrow \begin{aligned} l_1 &\approx 302 \\ l_2 &\approx 604 \\ l_3 &\approx 906 \end{aligned}$$

然而, $l_1 = 220.0 \pm 0.5$, $l_2 = 537.5 \pm 0.7$, $l_3 = 810 \pm 0.7$



虽然预测峰的位置不准, 但间隔预测挺准. 差不多每个峰的误差都为周期的 $\frac{1}{4}$.

要得到准确的峰位, 需要 ① 更精确的解

② 处理 spatial - to - angular 时更仔细些.

§ 7.4.3 Semi-Analytic Solution

• Long-wavelength solution

$k < k_{eq}$ 时, 在物质时期

$$\delta_r = \frac{4}{3} \delta_c = -\frac{8}{3} \Phi \quad (k < k < k_{eq})$$

若用 $\mathcal{R}_i$ 表示,

$$\Psi \approx \Phi = \frac{3}{5} \mathcal{R}_i, \quad \delta_r = -\frac{8}{5} \mathcal{R}_i \quad (k < k < k_{eq})$$

起初 重子的效应可以忽略, master equation

(11)

$$\delta_r'' + \frac{1}{3} k^2 \delta_r = -\frac{4}{3} k^2 \Psi$$

$\Rightarrow \delta_r = C \cos \varphi + D \sin \varphi - 4 \Psi$ 先求极限情况

$\varphi = \frac{k^2}{12}$

match $k < k_{eq}$ 的

$\Rightarrow$ 条件 ($\varphi \ll 1$ 时) $\delta_r = \frac{4}{5} \mathcal{R}_i (\cos \varphi - 3)$ (并 match 初始条件)

后来, 重子效应不可忽略, $\mathcal{R}$ 应纳入考虑.

再 match WKB 解.

$$\delta_r = \frac{4}{5} \mathcal{R}_i \left[(1+\mathcal{R})^{-1/4} \cos \varphi - 3(1+\mathcal{R}) \right] \quad (k < k_{eq})$$

$\varphi = k \int d\eta \frac{1}{\sqrt{3(1+\mathcal{R})}}$

• Short-wavelength solution

$$\delta_r = \frac{4}{5} \mathcal{R}_i \left[5(1+\mathcal{R})^{-1/4} \cos \varphi - 3(1+\mathcal{R}) \frac{\ln(0.15 \frac{k}{k_{eq}})}{(0.31 \frac{k}{k_{eq}})^2} \right] \quad (k > k_{eq})$$

• Solution at last-scattering

$$F_*(k) \equiv \frac{(\frac{1}{4} \delta_r + \Psi)_*}{\mathcal{R}_i}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{5} \left[\frac{1}{(1+\mathcal{R}_*)^{1/4}} \cos(k r_{s,*}) - 3\mathcal{R}_* \right] & k < k_{eq} \\ \frac{1}{5} \left[\frac{5}{(1+\mathcal{R}_*)^{1/4}} \cos(k r_{s,*}) - 3\mathcal{R}_* \frac{\ln(0.15 \frac{k}{k_{eq}})}{(0.31 \frac{k}{k_{eq}})^2} \right] & k > k_{eq} \end{cases}$$

在 $k \sim k_{eq}$ 时, 找一个插值函数.

Weinberg's ~~ansatz~~ ansatz

$$F_*(k) = \frac{1}{5} \left[\frac{S(k)}{(1+R_*)^{3/4}} \cos[kr_{s,*} + \theta(k)] - 3R_* T(k) \right]$$

limit:

$$k \ll k_{eq} : S \rightarrow 1, T \rightarrow 1, \theta \rightarrow 0$$

$$k \gg k_{eq} : S \rightarrow 5, T \rightarrow \frac{\ln(\dots)}{\dots}, \theta \rightarrow 0$$

$$\lambda \propto k = \sqrt{2} \frac{k}{k_{eq}}$$

$$\begin{cases} S(k) = \dots \\ T(k) = \dots \\ \theta(k) = \dots \end{cases} \quad (7.116)$$

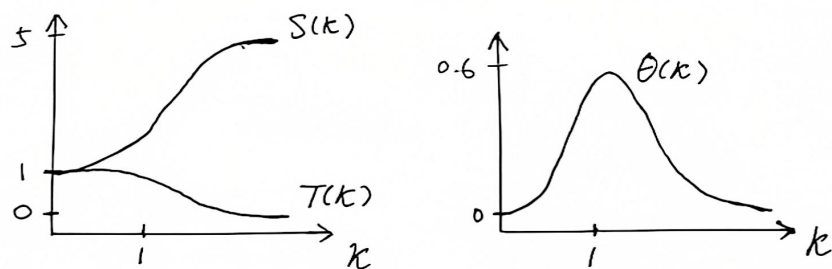


Fig 7.13 3个插值函数

$\theta(k)$ 带来 CMB 峰位的 shift. Weinberg 说现在的解与观测的吻合程度 "almost embarrassingly good". 实际上, 吻合的程度相当好 (在振荡部分)

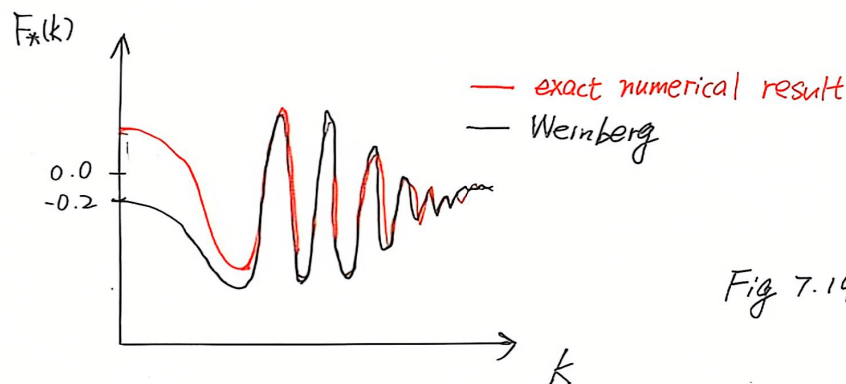


Fig 7.14

解出 δ_r 后, 利用在物质时期 $\delta_r' = \frac{4}{3} k v_r$, 有

$$G_*(k) = -\frac{\sqrt{3}}{5} \frac{S(k)}{(1+R_*)^{3/4}} \sin[kr_{s,*} + \theta(k)]$$

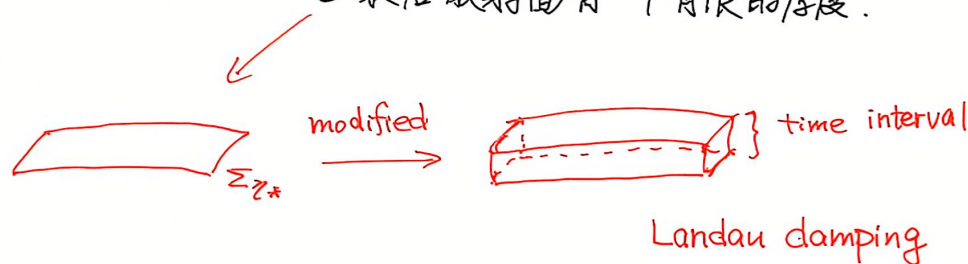
Doppler term's transfer function

$F_*(k)$ 中是 cos, 由此可见 Doppler term 与 SW term 的振荡不同相.

§ 7.4.4 Small-Scale Damping (大 l 时的阻尼)

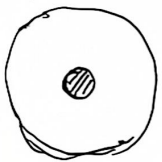
CMB 的图中, 在 $l > 1000$ 区域, 功率有压低的行为, 还未进行解释和讨论.

Damping 的源头:
 ① 光子的扩散抹除小尺度温度差异
 ② 最后散射面有一个有限的厚度.



① Silk damping

光子扩散的影响是小尺度的, 可以忽略宇宙膨胀的影响: $2\nu_b \ll \nu_b'$ (忽略膨胀效应). 此外, 由于 $-k^2 \pi \sim \mathcal{H}^2 \delta \Rightarrow k\pi \ll k\delta$.



那么, Euler equations

光子: $\nu_r' + \frac{1}{4}k\delta_r - \frac{2}{3}k\pi_r + k\pi = -\Gamma(\nu_r - \nu_b)$

重子: $R(\nu_b' + \cancel{2\nu_b} + \cancel{k\pi}) = \Gamma(\nu_r - \nu_b)$

$$\Rightarrow \nu_r' + \frac{1}{4}k\delta_r - \frac{2}{3}k\pi_r = -\Gamma(\nu_r - \nu_b) \quad (1)$$

$$R\nu_b' = +\Gamma\nu_{r-b} \quad (2)$$

之前的讨论建立在 Γ is large $\rightarrow \nu_r \approx \nu_b$ 下, 相当于只讨论了一个领头阶效应. 现在我们考虑次领头阶修正, 这会带来阻尼效应.

$$(1) - \frac{(2)}{R}:$$

$$\nu_{r-b}' = -\left(\frac{1+R}{R}\right)\Gamma\nu_{r-b} - \frac{1}{4}k\delta_r + \frac{2}{3}k\pi_r$$

强耦合 (Γ 很大) 下, 丢掉 π_r term, 丢掉 ν_{r-b}' term

有 (7.121) $\nu_{r-b} \approx -\frac{R}{4R} \frac{k}{\Gamma} \frac{\delta_r}{4}$ (之前是 ≈ 0) (变化很慢)

物理:

$$P_r \propto T_r^4 \rightarrow \text{RHS of (7.121)} = -\underset{\substack{\uparrow \\ \text{自由程}}}{d_r} \frac{\nabla T_r}{T_r}$$

因此 ν_{r-b} 非零与热传导 (thermal conduction) 相关.

(1)+(2), 有

$$R\nu_b' + \nu_r' + \frac{1}{4}k\delta_r - \frac{2}{3}k\pi_r = 0$$

利用 (7.121), 消

$$\downarrow \quad \nu_b' = \nu_r' + \frac{R}{1+R} \frac{k}{\Gamma} \frac{\delta_r'}{4}$$

$$(1+R)\boxed{\nu_r'} = -\frac{1}{4}k\delta_r - \frac{R^2}{4(1+R)} \frac{k}{\Gamma} \delta_r' + \frac{2}{3}k\pi_r$$

附录 B: 光子的各向异性应力 $\pi_r \approx -\frac{4}{9} \frac{k}{\Gamma} \nu_r$

$$= -\frac{1}{3} \frac{\delta_r'}{\Gamma} \quad \text{连续性方程}$$

连续性方程 (sub-Hubble scale)

$$\delta_r' = \frac{4}{3}k\nu_r \Rightarrow \boxed{\nu_r'} = \frac{3}{4k}\delta_r''$$

那么

$$\delta_r'' + \frac{k^2}{3(1+R)} \frac{\Gamma^{-1}}{\Gamma} \left(\frac{8}{9} + \frac{R^2}{1+R} \right) \delta_r' + k^2 G_s^2 \delta_r = 0$$

$\downarrow \propto \Gamma^{-1}$ 高阶修正引入了修正的 friction term.

用WKB近似求解.

考虑

$$\delta_r \propto \exp(i \int_0^\eta \omega(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta}) \quad , \quad \text{with } \omega' \ll \omega^2 \quad (\text{频率缓变})$$

那么

$$\delta_r' = i\omega\delta_r$$

$$\delta_r'' = (-\omega^2 + i\omega')\delta_r \approx -\omega^2\delta_r$$

↓ 忽略

$$\delta_r \propto e^{-k^2/k_{s*}^2} \exp(ik \int c_s(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta})$$

Damping!

$$k_s^{-2}(\eta) = \int_0^\eta \dots \quad (\text{太长不写})$$

$$\text{Weinberg's } S(k) \rightarrow e^{-k^2/k_{s*}^2} S(k)$$

插值函数(前面提过)

Standard ~~cosmological~~ parameter $\rightarrow k_{s,*}^{-1} \approx 7.2 \text{ Mpc}$

✓
 $\ell_s \sim 1370$ 处开始呈现
阻尼效应.

② Landau damping

⑭

recombination	$g(\eta)$ visibility function
瞬间	δ_{Dirac}
有一段时间	Gaussian

$$\Theta_\ell^{\text{SW}} = \int_0^\eta d\eta g(\eta) (\frac{1}{4}\delta_r + \psi) j_\ell(k\chi)$$

↓

Gaussian integral

$$e^{-\omega_*^2 \sigma_g^2 / 2} = e^{-\frac{k^2}{k_{L,*}^2}} \quad (\text{也会带来一个指数压低})$$

$$\text{Silk damping} + \text{Landau damping} \rightarrow k_{D,*}^{-1} = \sqrt{k_{s,*}^{-2} + k_{L,*}^{-2}}$$

$$\ell_D \sim \frac{k_{D,*} \ell_*}{\sqrt{2}} \sim 1125$$