



物理讨论班——范畴论讲义 (打*外可略过)

1. 范畴与态射的例子

1.1. 定义: 范畴(Cat)包含以下要素:

- (1) 对象 $Obj(C)$;
- (2) 态射 $Mor(C)$;
- (3) 对于三元组 (X, Y, f) , 可表示为 $X \xrightarrow{f} Y$
 $\begin{matrix} \text{Obj} & \text{Mor} & \text{source} & \text{target} \\ m & m & & \end{matrix}$
- (4) 称 $Hom_C(X, Y) = \{f: X \rightarrow Y\}$, 其中 $\iota: Mor(X, Y) \rightarrow X$
 $\tau: Mor(X, Y) \rightarrow Y$
 特别地, $id_X \in Hom_C(X, X)$
- (5) 态射之间有一运算 $\circ: (f \circ g) \rightarrow f \circ g$, 满足结合律与单位律

(类比: 么半群/模的定义)

1.2. 构造新范畴:

1.2.1. 子范畴: (1) $Obj(C') \subseteq Obj(C)$, $Mor(C') \subseteq Mor(C)$

(2) $Hom_{C'}(X, X) \subseteq Hom_C(X, X)$, 若 $X \in C'$

(3) $\iota: Mor(C') \rightarrow Obj(C)$ 为 ι, τ 在 C' 上限制.
 $\tau: Mor(C') \rightarrow Obj(C)$

(注: "嵌入"态: full (全) $Hom_{C'}(X, Y) \cong Hom_C(X, Y)$.)

1.2.2. 逆范畴 (掉转箭头): (1) $Obj(C^{op}) = Obj(C)$.

(2) $Hom_{C^{op}}(X, Y) = Hom_C(Y, X)$

(3) $f \in Hom_{C^{op}}(Y, Z)$ 则 $f \circ g \sim g \circ f$, $id^{op} = id$.
 $g \in Hom_{C^{op}}(X, Y)$.
 $X \xrightarrow{g} Y \xleftarrow{f} Z \quad Z \xleftarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$

1.2.3. Mono. Epi: (Mono): $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$ (左消去) (群论类比)

(Epi): $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$ (右消去) (不可分解)



1.2.4. iso: $g \circ f = id_X, f \circ g = id_Y, X \cong Y$. (二元关系)

(注意: Mono + Epi 在集合/群中为 iso. 然而普遍不真)

Example 1.2.5. $f: \mathbb{Z}^{\text{Ring}} \rightarrow \mathbb{Q}$ 显然不满

原因在于环同态构造更复杂, 更易“延拓”. 具体见下:

由 $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. 设 $g \circ f = h \circ f$. 则不引起歧义时可写作

$$g: \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{in}} \mathbb{Q}$$

考虑加法与乘法单位元. $g(0) = h(0) = 0$
 $g(1) = h(1) = 1$.

$$h: \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{in}} \mathbb{Q}$$

类似有 $n \mapsto n p/q$. $n \cdot 1 = n p/q \cdot p/q = n$. 则 $p/q = \pm 1$.
 $1 \mapsto p/q$.

又由于 $1 \cdot n = n \neq -n = -1 \cdot n$. 故 $g = h = id_{\mathbb{Q}}$.

1.2.6. 一些 trivial 的例子. (说一说其 Obj 与 Mor 是什么).

(1) 偏序集: $\text{Hom}(a, b): a \leq b$

(2) Set.

(3) $\text{Grp} \xrightarrow{\text{full}} \text{Ab}$

(4) Ring Ring

(5) $R\text{-mod} \text{ mod-} R$

(6) $k\text{-Vect}$

(7) Top. Topo.

1.3. 一些不那么 trivial 的例子. (有限 Abelian 群 & 紧 Abelian 群见 Schur 定理)

引入: 群表示, 即将群 $G \xrightarrow{\pi} GL(V)$. 其中 V 是线性空间. 多为复的 (Jordan-Chevalley)
记作 (π, V) .

1.3.1. (π, V) . 即对同一个群的不同表示构成一范畴. 其态射 $(\pi_1, V_1) \xrightarrow{T} (\pi_2, V_2)$
可直接写成 $T: V_1 \rightarrow V_2$ (线性映射)





Check: 只需验证下图交换. 或由 $T(\pi_1(y, z)) = \pi_2(Ty, Tz)$ 得.

$$\text{且 } T \in \text{Hom}(\pi_1, \pi_2) \subseteq \text{Hom}(W, V)$$

$$(c_1 T_1 + c_2 T_2)(\pi_1)_x = (\pi_2)_x (c_1 T_1 + c_2 T_2).$$

构成线性子空间 of $\text{Hom}(W, V)$.

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{V} & \xrightarrow{x} & \tilde{V} & \xrightarrow{y} & \tilde{V} & \xrightarrow{z} & \tilde{V} \rightarrow \dots \\ \tau \downarrow & & \tau \downarrow & & \tau \downarrow & & \tau \downarrow \\ W & \xrightarrow{\pi_x} & W & \xrightarrow{\pi_y} & W & \xrightarrow{\pi_z} & W \rightarrow \dots \end{array}$$

1.3.2. 不可约表示, 即不能对 $G \xrightarrow{\pi_0} GL(V_0)$ 作非平凡分解: $G \xrightarrow{\pi_1 \oplus \pi_2} GL(V_1) \oplus GL(V_2)$.

则有 Schur 引理: 若 (π_1, V_1) 与 (π_2, V_2) 不可约, 则 $T = 0$ 或同构

(只需验证: $\ker T$ 为 $\text{Hom}(W, V)$ 的不变子空间, 由不可约, $\ker T = 0$ 或 V)

1.3.3. 该范畴的不可约表示构成一范畴. 其 Obj, Mor 极简单.

特别地, $\langle (\pi_i, V_i), (\pi_j, V_j) \rangle = \begin{cases} 1, & T_{ij} \text{ 同构, 则有“内积”与“正交”} \\ 0, & T_{ij} = 0 \end{cases}$

1.3.4. 有限 Ab 群: 均可对角化(变)表示.

① 考虑 $T: (\pi, V) \rightarrow (\pi, V)$, 其中 (π, V) 不可约(表示)

则由 T 为同构, $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $(\pi, V) \xrightarrow{\lambda I - T} (\pi, V)$ 为恒映射.

故 T 的 Im 只有 1 维.

② 将 G 直和分解为 $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ (有限 Ab 群类)

则可得多重表示 $\lambda_1 \mathbb{C} \oplus \dots \oplus \lambda_n \mathbb{C}$, 因此为对角化(变)表示.

1.3.5. 紧 Ab 群: $\chi_g: \pi: g \mapsto A_g$ 连续.

则 $f_g = \sum_x \left(\int_G f_g \overline{\chi_g} dg \right) \chi_g$, $\{\chi_g\}$ 由 Schur 引理得 $L^2(G)$ 中正交系.

调和分析 $\Leftrightarrow$ 群表示论 故 $\int_G |f_g|^2 dg = \sum_x |a_x|^2$

• 由 Schur, $\int_G \chi_g dg = \begin{cases} 1, & \text{trivial, 不可约} \end{cases}$

• Hilbert: $T(\omega) = \int_G \langle \pi_1(g)\omega, v_1 \rangle \pi_2(g^{-1})v_2 dg$ 为卷积, 且 G -不变. (自然变换) 往后看.

check: $T(\pi(h)\omega) = \int_G \langle \pi_1(gh)\omega, v_1 \rangle \pi_2(g^{-1})v_2 dg \xrightarrow{g \mapsto gh^{-1}} \int_G \langle \pi_1(g)\omega, v_1 \rangle \pi_2(hg^{-1})v_2 dg = \pi_2(h)T\omega$





武汉大学

WUHAN UNIVERSITY

Wuhan 430072, Hubei, P.R.China 中国·武汉 Tel.(027)

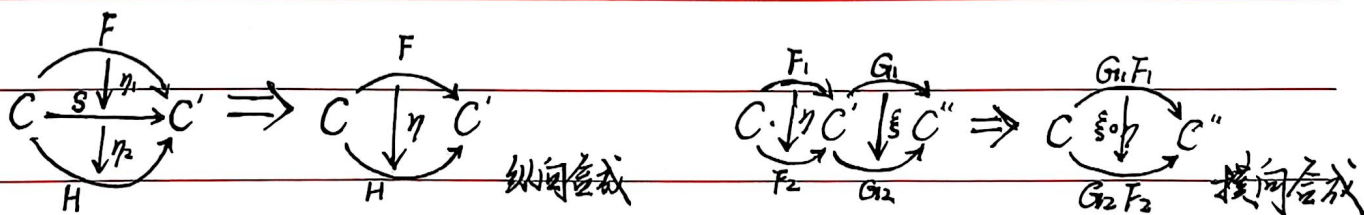
- Arzela-Ascoli 定理
- Hilbert-Schmidt 算子: $Tf(x) = \int_X \left(\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) \psi_i(y) \right) f(y) d\mu(y)$.
取 $\sum_1^N$ 时, T_N 为有限秩算子, 故 T 紧.
- Peter-Weyl 定理: G 在 $C(G)$ 中稠密 (因此在 $L^2(G)$ 中稠密).

2. 范畴之间的关系: 函子 (functor).

2.1. 定义: 函子 $F: C \rightarrow D$. 其中 C, D 均为范畴.

- (1) 对任意 $X \in \text{Obj}(C)$, 有 $F(X) \in \text{Obj}(D)$
- (2) 对任意 $f \in \text{Mor}(C)$, 有 $F(f) \in \text{Mor}(D)$
- (3) $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$.
- (4) 特别地, 若 $F(gf) = F(g)F(f)$ 称 协变 (covariant)
 $F(gf) = F(f)F(g)$ 称 反变 (contravariant)
 (很多时候, 协变与反变相差于箭头反转后范畴之间的对应)

2.2. 类似乎映射 (态射), 函子之间也能合成:



不难发现, 若 Category 作为 Obj , 函子作为 Mor , 则得一个更大范畴, 称 2-范畴.

这一过程可以反复进行. 然而在 ZFC-公理体系中仍避免“无穷范畴”的存在. 在第三节我们会聊到一点范畴哲学.



2.3. 函子的例子:

2.3.1. "协变"与"逆变"最初在19世纪末提出,用于多变量系统的坐标变换
在20世纪继续为微分形式:

一维情形: $y = bx$, 则 $\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}$ (反变)

$bdx = dy$ (共变).

k维情形: $y = Ax$, 则 $A^T \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)$ (反变)

$A(dx^1, dx^2, \dots, dx^n)^T = (dy^1, \dots, dy^n)^T$ (共变)

这是线性对偶空间的特例.

2.3.2. $Vect \xrightarrow[\text{Hom}(Vect, \mathbb{R})]{T} Vect^* = \text{Hom}(V; \mathbb{R})$ 交换:

$V = \{e_1, \dots, e_n\}$

$V^* = \{f_1, \dots, f_n\}$

$g \downarrow$

$\uparrow \pi(g)$

$W = \{e'_1, \dots, e'_m\} \xrightarrow[\text{Hom}(W, \mathbb{R})]{T} W^* = \{f'_1, \dots, f'_m\}$

$f \downarrow$

$\uparrow T(f)$

$U = \{e''_1, \dots, e''_k\} \xrightarrow[\text{Hom}(U, \mathbb{R})]{T} U^* = \{f''_1, \dots, f''_k\}$

这是 $R\text{-Mod}$ 上的特例.

check:

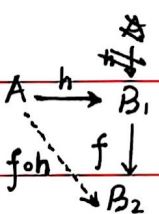
$$v = \sum_i c_i e_i \xrightarrow{\text{Hom}} f = \sum_i c_i f_i$$

$$w = \sum_j \left(\sum_i c_i A_{ij} \right) e'_j \xrightarrow{\text{Hom}} f' = \sum_i c_i (Ae_i)^*$$

2.3.3. $\text{Hom}_R(A, B)$ 包含两类函子: $\text{Hom}_R(A, -)$ 与 $\text{Hom}_R(-, B)$. (Hom 就是对偶空间)
(-, B)

(1) $\text{Hom}_R(A, f): \text{Hom}_R(A, B_1) \rightarrow \text{Hom}_R(A, B_2)$ 这是共变函子.

$$(A \xrightarrow{h} B_1) \mapsto (A \xrightarrow{h} B_1 \xrightarrow{f} B_2)$$



$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{\text{Hom}} & \text{Hom}_R(A, B_1) \\ f \downarrow & & \downarrow f^* \\ B_2 & \xrightarrow{\text{Hom}} & \text{Hom}_R(A, B_2) \\ g \downarrow & & \downarrow g^* \\ B_3 & \xrightarrow{\text{Hom}} & \text{Hom}_R(A, B_3) \end{array}$$

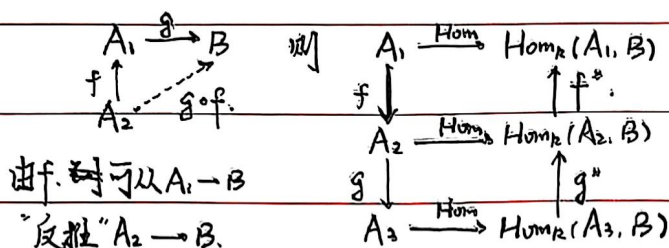
左图交换

$$\begin{array}{ccc} (\pi_1, V_1) & \xrightarrow{T} & (\pi_2, V_2) \\ h \downarrow & & \downarrow h^* \\ (\pi_1, V_1) & \xrightarrow{T} & (\pi_2, V_2) \end{array}$$

对 h 将 f 拉回 (pullback) $fh: h^*f = fh$. (回忆 Hilbert: $T(\pi_1(h))w = \pi_2(h)T(w)$
交换图的意义在于“不变性”



(2). 反变函 $\text{Hom}_R(-, B): \text{Hom}_R(A_1, B) \rightarrow \text{Hom}_R(A_2, B)$ 则有 $g^*f = gf$
 $(A_1 \xrightarrow{g} B) \mapsto (A_2 \xrightarrow{f} A_1 \xrightarrow{g} B)$

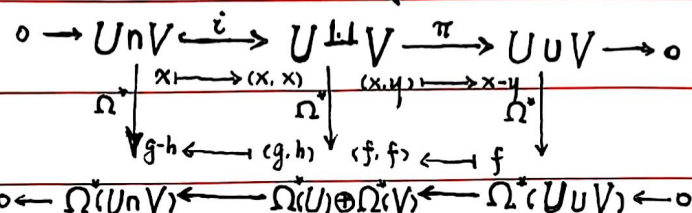


2.3.4. 微分形式 $\Omega^k(M)$. Ω^k 是一个拓扑 $\rightarrow$ 代数函子. 定义为 M 上所有 k -形式之集合.

- 0-form: $f(x)$
- 1-form: $f(x)dx^1$
- 2-form: $f(x)dx^1 \wedge dx^2$
- $\vdots$
- k -form: $f(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$

记 $\Omega^* = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k$ 为分次微分形式.

考虑流形 $M = U \cup V$. 则有:

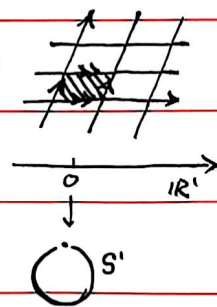


简化起见, 设 U, V 为连通开集. 其上的 k -form 是 trivial 的 (Poincaré Lemma). 则 Ω^* 反变函子. 特别地有正合列

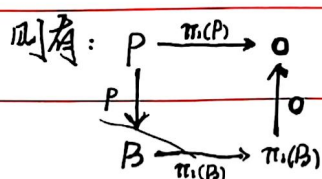
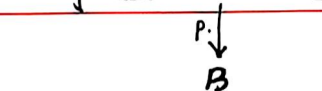
2.3.5. Poincaré 研究基本群 π_1 (即基点的一维环路同伦等价类, 由道路组合成为群)

(1). π_1 是一个函子: $\pi_1: \text{Top}_0 \rightarrow \text{Grp}$.

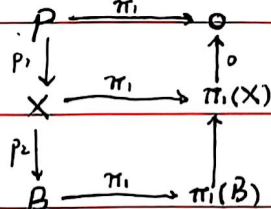
(2). $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow T^2$ 的万有覆盖为 $\mathbb{R}^2$
 $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \rightarrow S^1$ 的万有覆盖为 $\mathbb{R}$
 $\pi_1(*) = 0$. 若 $P \simeq *$. 则可偏引.



(3). 万有覆盖: P 使得 $\pi_1(P) = 0$. P 是 B 的 copy.



更仔细地: 考虑 $\text{Aut}(\pi_1(B))$. 得 $\pi_1(B)$ 的正规子群. 有 $X \xrightarrow{p_2} B$.



故其为反变函子.

有 $\pi_1(B) = "[P: B]"$.

覆盖空间的亏量与 $\pi_1(B)$ 亏量相等



2.3.6.* 考虑预层范畴 $\text{PSh}(X, \mathcal{O})$, 记为 PSh , 与层范畴 $\text{Sh}(X, \mathcal{O})$, 记为 Sh .

(预层与层之区别在于局部“连续”条件)

易知, Sh 是 PSh 的全子范畴.

且 $\exists \# : \text{PSh} \rightarrow \text{Sh}$ 函子.

$$\gamma : \text{I}_{\text{PSh}} \Rightarrow \text{id}_{\#}$$

$$\gamma_{F_x} : F_x \xrightarrow{\cong} (\text{id}_{\#})(F_x)$$

到芽丛截面的连续映射

2.3.7.* (Galois 理论) 对于域与群的关系, Galois 对应也有类似的反变关系:

$\text{Gal}(K, -)$ 是域 $\rightarrow$ 群的反变函子.

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\text{Gal}} & \text{Gal}(K/K) \\ \uparrow i & & \downarrow i^* \\ D & \xrightarrow{\text{Gal}} & \text{Gal}(K/D) \\ \uparrow j & & \downarrow j^* \\ F & \xrightarrow{\text{Gal}} & \text{Gal}(K/F) \end{array}$$

2.4. 自然变换. 拉回

回忆 2.3.3. (1) 的回忆内容. 与 2.3.2.

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\text{Hom}} & V^* & \xrightarrow{\text{Hom}} & V^{**} \\ g \downarrow & & g^* \uparrow & & g^{**} \downarrow \\ W & \xrightarrow{\text{Hom}} & W^* & \xrightarrow{\text{Hom}} & W^{**} \end{array}$$

则 $\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tau_x} & V^{**} \\ g \downarrow & & g^{**} \downarrow \\ W & \xrightarrow{\tau_x} & W^{**} \end{array}$

$w_e \xrightarrow{g(w)} w^{**} = g^{**}(v) = v(g)$

- 两列都是共变, 一起变化.
- 图交换: 则将纵列“拉回”.

2.4.1. 自然变换的定义:

$F, G : C \rightarrow D$ 共变.

$\exists A \mapsto \tau_A$, 使得 $\forall A$ 对应 (同构) τ_A .

且对 $\forall f : A \rightarrow B$, 下图交换:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\tau_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\tau_B} & G(B) \end{array}$$

左图在前面见过不少了, 最后提一下
由交换知其为等价关系:

$$\begin{array}{ccccccc} V & \rightarrow & V^* & \rightarrow & V^{**} & \rightarrow & \dots \\ g \downarrow & & g^* \downarrow & & g^{**} \downarrow & & \\ W & \rightarrow & W^* & \rightarrow & W^{**} & \rightarrow & \dots \end{array}$$



2.4.2. 拉回 (pull back) 与自然变换:

例子: tensor product. 最基性质: $R \otimes_R A \cong A$
 由于 $\otimes$ 左右均为 R -module (待会提):

$$(R \otimes_R A) \cong \text{id}_{R\text{-mod}} \circ A$$

$g: A \rightarrow B$ g^* 由 $g: A \rightarrow B$ 诱导

$$(R \otimes_R B) \cong \text{id}_{R\text{-mod}} \circ B$$

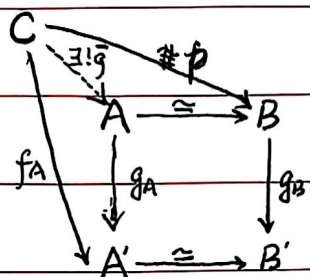
$$(A \otimes_R R) \cong \text{id}_{R\text{-mod}} \circ A$$

$g: A \rightarrow B$ g^* 由 $g: A \rightarrow B$ 诱导

$$(B \otimes_R R) \cong \text{id}_{R\text{-mod}} \circ B$$

则 g^* 完全由 g 决定.

考虑下面图:



则 g_B 由 $f_A, g_A, \dots$ 诱导而来

若 C 大得多, 则仍不改变 g_B 的性质.

g_B 是 $g_A, f_A, \dots$ 的拉回.

称 B' 是拉回像.

3. 回顾: 一点范畴语言与数学 (闭扯)

- 数学的“高”与“桥梁”: 相似性与函子作用
- 不变性: 交换图, 自然变换, 拉回 (Eilenberg-MacLane).
- 泛性质与箭头方向: Proj, Inj, $\otimes$ 三种模, 上司谓词上模结构.
- 可表函子 (Riesz). Yoneda 引理: 关系三性度.

(补充: 2.2 中提到了“作为范畴的范畴”, 为避免 Russell 悖论, 可以用“小且足够”的范畴.

Grothendieck 构造了 $\mathcal{U}$ -范畴:

(1) transitivity: $x \in \mathcal{U} \Rightarrow x \in \mathcal{U}$.

(2) pairing: $x, y \in \mathcal{U} \Rightarrow \{x, y\} \in \mathcal{U}$

(3) power: $x \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in \mathcal{U}$

(4) union: $x \in \mathcal{U}$
 $f: x \rightarrow \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup_{i \in x} f(i) \in \mathcal{U}$.

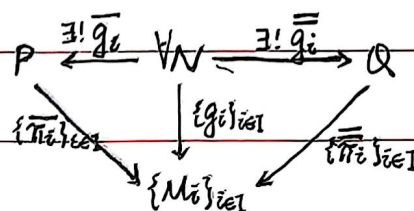
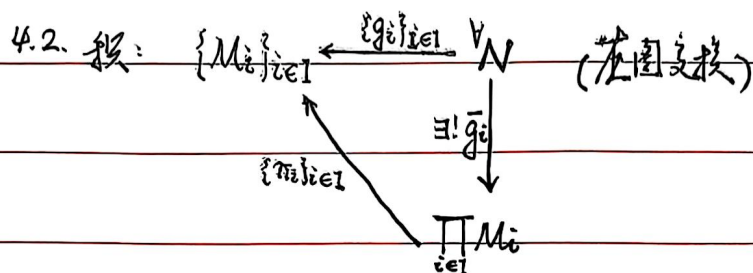
(5) $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$ (足够大)



4. 积、余积 (co-product), 自由对象, 张量积

4.1. 有一组范畴 (和切片范畴) 如何拼成最大?

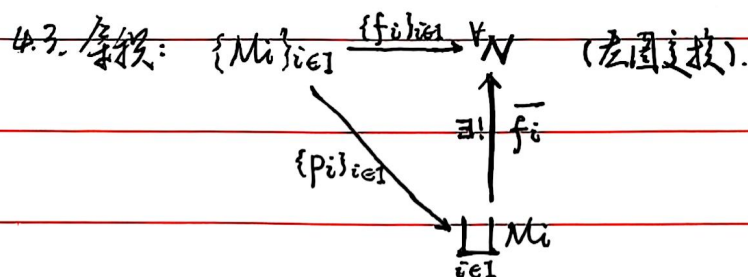
- 怎么拼?
- 怎么证明/理解最大?



为说明这是一种自由构造: 若对 P, Q 均有上述性质, 则 $P \cong Q$. 即上图

(设 $\pi_i(p) = \pi_i(q)$, 则 $T: p \mapsto q$, 对 Obj 与 Mor 均一致.)

若 $T(p) = 0$, 则 $\pi_i(T(p)) = 0$ 故 $\pi_i(p) = 0, p = 0$. 单, 再证全 (full) 忠实 (faithful)
故积是存在且唯一, 故 $\prod$ 操作良定义.



重复上图论证可知 $\coprod$ 操作良定义, 有时也称为直积.

4.4. $\prod \neq \coprod$: 当 I 无穷时:

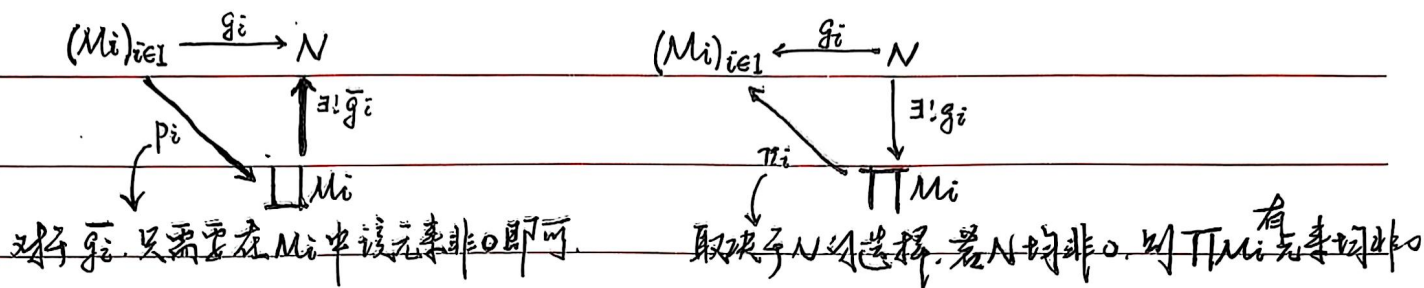
$$\prod_{i \in I} \mathbb{Z}^{(i)} = \{(a_1, a_2, \dots) \mid a_i \in \mathbb{Z}, i \in I\}$$

(直积 $\leq$ 直和)

$$\coprod_{i \in I} \mathbb{Z}^{(i)} = \{(a_1, a_2, \dots, 0, \dots, 0, \dots) \mid a_i \in \mathbb{Z}, i \in I, \text{有限非0元}\}$$



简单解释上述原因:



4.5. $\times$ 与 $\oplus$ 在有限维时一致:

($n=1$ 时显然, 只需对 $M_1 \oplus M_2$ 与 $M_1 \times M_2$ 之间构造同构, 恒内导出)

故有限维时 $\oplus$ 与 $\times$ 是相同的.

4.6. 自由(模)对象: $V \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ 则 $X \xrightarrow{\varphi} V$
 $\lambda: X \rightarrow V.$

(所谓泛性质即 $\exists! \bar{f}$, 说明 V 中信息足够多).

诱导: 泛性: 存在唯一性...

4.7. 张量积 (tensor product).

“张量积是线性运算” (薛江维老师的 slogan)

4.7.1. $V \otimes V \otimes \dots \otimes V := V \times V \times \dots \times V / (\text{非线性部分}) \rightarrow A_{\text{alg}}$. 交换代数.

4.7.2. 张量是一堆量 (类似子矩阵). $a \otimes b$ 未必是良定义的. $a \otimes b \rightarrow c$ 时一定要注意!

4.7.3. 若 V 为线性空间, 则张量积即 Disjunctive 积/直积.

$A \times B = A \otimes B$ 为 $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ 上的线性映射.

则 $v \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^m$. 有 $A \otimes B(v \otimes w) = (A(v)) \otimes (B(w)).$

做法是 $A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & a_{13}B & \dots \\ a_{21}B & a_{22}B & a_{23}B & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{n \times m}$



$$\begin{aligned}
 \text{例 } (A \otimes B)(v \otimes w) &= \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & a_{13}B & \dots \\ a_{21}B & a_{22}B & a_{23}B & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{n \times m} \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & v_1 w_3 & \dots \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & v_2 w_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{m \times m} \\
 &= \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \right) (Bw) \\
 &= (Av)(Bw) \\
 &= A(v) \otimes B(w). \text{ 故 } A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

4.7.4. $\otimes$ 运算的一些性质 (略去证明).

(1) 结合律: $(A \otimes B) \otimes C = (A \otimes C) \otimes (B \otimes C)$

(2) 结合律: $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$

(3) 左结合性: $0 \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C \xrightarrow{i} 0$. 正合 (ker $f_n = \text{im } f_{n-1}$)

则 $0 \xrightarrow{f \otimes 1} A \otimes E \xrightarrow{g \otimes 1} B \otimes E \xrightarrow{h \otimes 1} C \otimes E \rightarrow 0$ 正合.

$0 \xrightarrow{1 \otimes f} E \otimes A \xrightarrow{1 \otimes g} E \otimes B \xrightarrow{1 \otimes h} E \otimes C \rightarrow 0$ 正合.

4.7.5. 在微分几何中的应用: 微分形式. (线性, 应对非线性 (流形))

一般地定义 k -form: $\wedge^k(X) = \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} (-1)^{\text{sgn } \sigma} e_{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(i_k)}$.

其为交替型 $(\wedge^k, 0)$ 张量. 指标由 $\underbrace{V \times \dots \times V}_p \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_q$ 决定.

同样能定义对称型 $\dots$

• 联络形式是特殊的 1-form.

• 曲率形式是特殊的 2-form.

(且可构造内在微分算子 $D_s = d + [\omega, \cdot]$. 则 $\Omega = D_s \gamma$. 故 $D_s \Omega = 0$. 即 Bianchi 等式)

4.7.6.* (补). 扩域与性质的应用: Clifford 代数



Clifford 代数: 在内积空间中.

$$T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_n$$

$$Cl(V) = T(V) / \langle v \otimes v + \|v\|^2 1 \rangle \quad (\text{即 } v \otimes v = -\|v\|^2 1 \text{ 为 } Cl(V) \text{ 元素性质})$$

基 $e_i^2 = -1$ 在 $Cl(V)$ 中

这就通过张量代数构造出与 1 共线向量度根 $e_i^2 = -1$ 具体例子如 $\mathbb{C}$ 中 i 不多说.

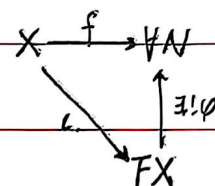
4.7.7. (自由模).

$$x \in X, R \text{ 则 } FX = \bigoplus_{x \in X} Rx.$$

易证明其具有泛性质:

$$i: X \hookrightarrow FX$$

$$x \mapsto 1 \cdot x.$$



5. 一点小概念: 始、终、零、泛性质、伴随

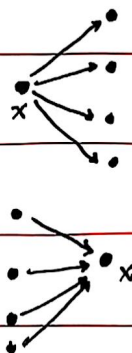
5.1. 始、终、零对象:

(1) $\text{Hom}_C(X, Y)$ 均有一条: 始对象

(2) $\text{Hom}_C(Y, X)$ 均有一条: 终对象

(3) (1) + (2) = 零对象.

(4)
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ & \circlearrowleft & \\ & g & \end{array} \quad \begin{array}{l} f \circ g = id_{X'} \\ g \circ f = id_X \end{array} \text{ 存在唯一.}$$



例子: (1) $(\mathbb{Z}, \leq)$ 没有始、终

(2) Set : $\emptyset$ 是零对象

(3) Gp : $[e]$ 是零对象

(4) Ring : $\mathbb{Z}$ 是始对象 (整数环多项式环的泛性质)





5.2. 伴随算子/子:

5.2.1. (F, G, φ) . $F: C_1 \rightarrow C_2$ 且存在一个自然同构 $\varphi: \text{Hom}_{C_2}(F(\cdot), \cdot) \rightarrow \text{Hom}_{C_1}(\cdot, G(\cdot))$
 $G: C_1 \rightarrow C_2$.
 则称 G 是 F 右伴随,
 F 是 G 左伴随.

(1) 例子: 自由函子 $F: \text{Set} \rightarrow \text{Vect}$
 $x \mapsto x$ 是 V 的一个基 则 $\text{Hom}_{\text{Vect}}(F(\cdot), \cdot)$ 是自然同构
 遗忘函子 $U: \text{Vect} \rightarrow \text{Set}$
 $x \mapsto x$
 $\varphi \downarrow$
 $\text{Hom}_{\text{Set}}(\cdot, U(\cdot))$
 把线性映射系数
 忘掉写为集合映射

故有“自由是遗忘的左伴随, 遗忘是自由的右伴随”.

(Check: 只因看右图交换: $\text{Hom}_V(F(\cdot), \mathbb{R}) \xrightarrow{\varphi} \text{Hom}_S(\cdot, U(\mathbb{R}))$
 $\downarrow \text{Hom}_V(g) \quad \downarrow \text{Hom}_S(g)$
 $\text{Hom}_V(F(g\cdot), \mathbb{R}) \xrightarrow{\varphi'} \text{Hom}_S(g\cdot, U(\mathbb{R}))$

(2). 一些 trivial 的伴随函子:

① $\langle c\mathbb{R}, \mathbb{R} \rangle_c = \langle \mathbb{R}, \frac{1}{c}\mathbb{R} \rangle_c$

② $\langle Av, w \rangle = \langle v, A^T w \rangle$.

③ Hilbert 空间上: X . Banach. $T \in B(X)$. $T^*: X^* \rightarrow X^*$ 定义为:

$(x, T^*y^*) = (T^*y^*)(x) = y^*(Tx) \xrightarrow{\text{Riesz}} (Tx, y)$ 称 T 为 T 的伴随算子.

(对偶空间与伴随算子是泛函中重要的方法).

(to be continue)

陳煜輝

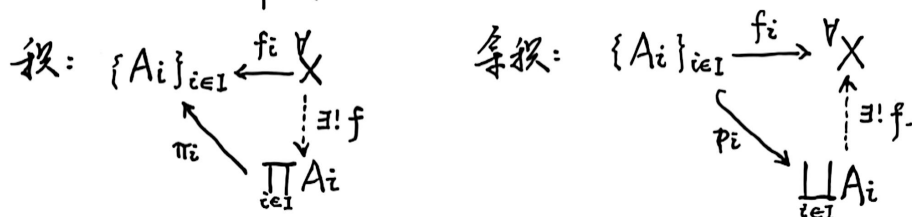
2025.3.17



范畴论讲义补充:

1. 极限与余极限:

回忆在积与余积中构造是:

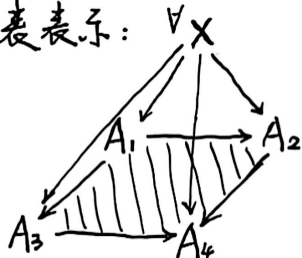


这里 $\prod_{i \in I} A_i$ 与 $\coprod_{i \in I} A_i$ 具有泛性质(万有性质).

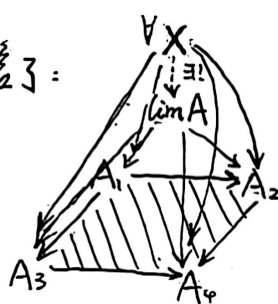
直观地看, $\prod_{i \in I} A_i$ 天然地“储存”了 $\{A_i\}_{i \in I}$ 的所有信息.

因此任意对象到 $\{A_i\}_{i \in I}$ 的映射, 实际上是积对象“内部”的写量. 这种现象

用图表表示:



这一锥体实则隐含了:



(余极限即将箭头反转) $\lim F$.

例子: 度量空间的完备化是逆同(余)极限(Cauchy列等价类).

设度量空间为 Q , 其 n -网为 Q_n .

则 $Q/Q_{n+1} \xrightarrow{\theta_{n+1}} Q/Q_n$ 为投影, 进而 Cauchy 列(类)

$(\xi_n)_{n \geq 1}$, 对任意 n , $\theta_{n+1} \xi_{n+1} = \xi_n$.

则取 ξ_n 陪集中任一元素 x_n , $x_{n+1} - x_n \in Q_n$, 为 Cauchy 列.

则在 Q 中得到一些 Cauchy 列 $(x_n)_{n \geq 1}$.

因而 Q 的完备化 R 为 Cauchy 列的等价类 $(\xi_n)_{n \geq 1}$ 集合.

即 $R = \varprojlim_n Q/Q_n$, (当 Q 为有理数域时, R 为实数域).

此时泛性质表明 R 是完备的“最小”集合, 即对任意 X ,

$Q \xrightarrow{f} X$ 均可延拓为

$R \xrightarrow{\tilde{f}} X$, 且有

$Q \hookrightarrow R$.

(度量取非欧度量时, 可以有完全不同的完备化:

p -adic 是取 p 进度量……)

2. '外直和'与'内直和'

ps: 找了很久在数学书上没找到数学的内外之别.

根据郑卜凡同学所描述简单说一下.

(1) 这不是范畴意义上的'积'、'余积(和)'的区别.

外直和是将集合/对象拼起来的方法.

即前文所提的'余积(和)'.

内直和按物理的说法, 即将元素相加, 得到新的集合(群).

(2) 这两者 *make sense* 应当在群或线性代数中:

① 外直和不依赖于两个群/线性空间以外的群/线性空间.

$$A \oplus B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}, a, b \text{ 不相关}.$$

② 内直和必定是某个更大的群/线性空间(子群/线性空间).
依赖于这个更大的空间.

如: $\mathbb{R}^3$ 中由 $\{x, y\}$ 轴张成的 $\mathbb{R}_{(xy)}^2$, 取 $\{\omega \mid \omega = \alpha + \frac{b}{x} + \frac{c}{y}, \alpha \in \mathbb{R}_{(xy)}^2, b \in \mathbb{R}_{(x)}^1, c \in \mathbb{R}_{(y)}^1\} = \mathbb{R}^3$.
 $\{y, z\}$ 轴张成的 $\mathbb{R}_{(yz)}^2$
 $\{z, x\}$ 轴张成的 $\mathbb{R}_{(zx)}^2$ 而 $\mathbb{R}_{(xy)}^2 \oplus \mathbb{R}_{(yz)}^2 \oplus \mathbb{R}_{(zx)}^2 \cong \mathbb{R}^6 \neq \mathbb{R}^3$.

换言之, 重合部分在相加时并没有生成新的东西.

③ 例子: 群论中直积是两个群或多个群'并置', 即 $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.
(和) $\oplus$ 其中 $(a_1, b_1) \bullet (a_2, b_2) = (a_1 \bullet a_2, b_1 \bullet b_2)$.

半直积是一个群内部的正正规子群 N 与子群 H :

$$H \xrightarrow{\theta} \text{Aut}(N), \text{ 则 } N \rtimes H = \{(a, b) \mid a \in N, b \in H\}.$$

$$\text{其中 } (a_1, b_1) \circ (a_2, b_2) = (a_1 \bullet \theta(a_2), b_1 \bullet b_2)$$

这两者的区别在大群 G 内部尤其清楚, N 正规子群, H 子群.

$$\text{则 } G = N \rtimes H \text{ 当且仅当 } G = N \times H \text{ 且 } N \cap H = \{e\}.$$

换言之 N 与 H 没有重合部分时, 两者才相等.